Die Notwendigkeit der Mathematik und die Autonomie der Sprache: zu Wittgensteins Philosophie der Mathematik

Abhandlung
Zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der
Universität Zürich

vorgelegt von
Kai Büttner

Die vorliegende Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Zürich im Frühjahrssemester 2013 auf Antrag der Promotionskommission bestehend aus Prof. Dr. Hans-Johann Glock (Vorsitz), Dr. Severin Schroeder und PD Dr. Sebastian Florian Weiner als Dissertation angenommen.

Zürich, 2015

Danksagungen

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr. Hans-Johann Glock für seine intensive Betreuung, für die zahlreichen gemeinsamen Diskussionen sowie für die Anregungen und Kommentare zu früheren Fassungen dieser Arbeit. Ebenfalls zu grossen Dank bin ich Professor Mathieu Marion verpflichtet. Aus den vielen Diskussionen, die wir während meines Forschungsaufenthaltes in Montréal geführt haben, ergaben sich wertvolle Impulse für diese Arbeit. Weitere Anregungen verdanke ich Diskussionen mit Peter Hacker und Daniel Isaacson. Ein besonderer Dank gilt dem Schweizerischen Nationsfonds für dessen finanzielle Unterstützung in Form einer dreijährigen Projektförderung für meine Dissertation sowie der Förderung des einjährigen Forschungsaufenthaltes in Montréal.

Inhalt

Abkürzungen i

Vorwort iii

Analytisches Inhaltsverzeichnis v

Teil I: Semantische und logische Grundbegriffe

1. Wahrheitsbedingungen und Verifikationsregeln 1
2. Tautologien und Implikationen 55
3. Philosophie der Logik 84

Teil II: Semantische Analysen

4. Zahlaussagen 105
5. Abstrakte Sortale 139
6. Arithmetische Gleichungen 188
7. Arithmetische Gesetze 213

Teil III: Philosophie der Mathematik

8. Die Autonomie arithmetischer Aussagen 229
9. Arithmetische Aussagen als Darstellungsnormen 275

Nachwort 303

Literaturverzeichnis 306

Abkürzungen von Wittgensteins Werken

TLP	*Tractatus logico-philsophicus*, Werkausgabe Bd. 1, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1988.
PU	*Philosophische Untersuchungen*, Werkausgabe Bd. 1, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1988.
PB	*Philosophische Bemerkungen*, Werkausgabe Bd. 2, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1984.
WWK	*Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Werkausgabe Bd. 3, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1984 .
PG	*Philosophische Grammatik*, Werkausgabe Bd. 4, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1989.
BGM	*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Werkausgabe Bd. 6, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1994.
Z	*Zettel*, Werkausgabe Bd. 8, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1999.
VB	*Vermischte Bemerkungen*, Werkausgabe Bd. 8, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1999.
VGM	*Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik*, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1978.

Vorwort

Sollte man eine Frage der Philosophie der Mathematik als deren Grundfrage bestimmen, so bietet sich hierfür die Frage danach an, wie das Verhältnis zwischen Mathematik und Wirklichkeit zu verstehen ist. Wittgensteins Beantwortung dieser Frage kann in zwei Thesen zusammengefasst werden, die im Rahmen dieser Arbeit als die *Autonomiethese* und die *Normativitätsthese* bezeichnet werden sollen. So behauptet Wittgenstein zum einen, dass die Mathematik keiner Wirklichkeit verantwortlich und insofern *autonom* sei. Denn im Gegensatz zu empirischen Sätzen hängen die Wahrheitswerte mathematischer Sätze nicht von der Wirklichkeitsbeschaffenheit ab. Zum anderen behauptet er, dass mathematische Sätze Regeln für die Umformung empirischer Sätze seien. Hiernach stellt die Mathematik also nicht selbst die Wirklichkeit dar, sondern formuliert lediglich *Normen* für deren Darstellung. Wittgenstein zu Folge ist das Verhältnis zwischen empirischen und mathematischen Sätzen also nicht durch eine Analogie, sondern durch eine Art Komplementarität charakterisiert. Denn es ist nicht so, dass Sätze beider Arten verschiedene Wirklichkeitsbereiche beschreiben. Vielmehr fällt diese deskriptive Funktion allein den empirischen Sätzen zu. Die mathematischen Sätze sind dagegen Regeln für die Vereinbarkeit verschiedener solcher Beschreibungen.

Der Umstand, dass sich bereits in den LPA Vorläufer der Autonomiethese (in 6.23 und 6.2321) und der Normativitätsthese (in 6.211) finden, verweist auf eine bemerkenswerte Kontinuität in Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Da es jedoch bereits ausgezeichnete Darstellung der Entwicklung von Wittgensteins Denken gibt[1], soll das Ziel dieser Arbeit nicht exegetischer, sondern systematischer Art sein. So sollen zwar verschiedentlich Deutungen einzelner Bemerkungen Wittgensteins vorgeschlagen und entsprechende Fehlinterpretationen als solche identifiziert werden. Das grundsätzliche Ziel dieser Arbeit soll jedoch darin bestehen, die Autonomiethese und die Normativitätsthese als korrekt zu erweisen. Umfangshalber werden die hierfür erforderlichen Untersuchungen mathematischer Sätze zwar zumeist auf die Sätze der Arithmetik und Algebra eingeschränkt werden müssen. Die entsprechende Verallgemeinerbarkeit ihrer Ergebnisse sollte allerdings aus diesen Untersuchungen ersichtlich werden.

Dass Wittgensteins Philosophie der Mathematik bislang wenig verstanden und daher in systematischen Diskussionen kaum berücksichtigt wurde, ist nicht allein auf seinen unsystematischen Schreibstil zurückzuführen. Verantwortlich hierfür sind auch seine sprachphilosophischen Prämissen und seine allgemeine Philosophiekonzeption. Das Hauptziel des ersten Teils dieser Arbeit wird daher darin bestehen, den kleinsten gemeinsamen Nenner zwischen den Grundsätzen Wittgensteins und den in systematischen Diskussionen der

[1] Etwa Shanker (1987), Frascolla (1994), Marion (1998) oder Mühlhölzer (2010).

Philosophie der Mathematik unterstellten Grundsätzen zu bestimmen. Hierbei soll dafür argumentiert werden, dass der weitverbreitete Grundsatz der wahrheitskonditionalen Semantik, dem zu Folge die Bedeutung einer Aussage in ihren Wahrheitsbedingungen besteht, als ein solcher, für alle – oder zumindest die allermeisten – Seiten akzeptabler Ausgangspunkt gewählt werden kann. Denn wie in Kapitel 1 zu zeigen sein wird, ist der Wittgensteinsche Grundsatz, wonach die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Gebrauch besteht, nicht unvereinbar mit dem Grundsatz der wahrheitskonditionalen Semantik. Er bestimmt lediglich, dass die Adäquatheit von Wahrheitsbedingungsangaben in Abhängigkeit davon zu bewerten ist, ob sie die Verifikationsregeln der entsprechenden Aussagen akkurat kodifizieren. Bei der Wahl dieses Ausgangspunkts können Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen der zu verteidigenden Position Wittgensteins und anderen Positionen in der Philosophie der Mathematik dann durch Bezug auf die Antworten dargestellt werden, welche sich aus diesen Positionen auf die Frage danach ergeben, in welcher Weise die Wahrheitsbedingungen mathematischer Aussagen zu formulieren sind.

Das Programm für diese Arbeit kann somit wie folgt beschrieben werden. Orientiert an Wittgensteins Grundsatz, wonach die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Gebrauch besteht, sollen im ersten Teil dieser Arbeit die Rede von Wahrheitsbedingungen sowie einige weitere semantische und logische Grundbegriffe geklärt werden. Die hierbei bestimmten Begriffe sollen dann im zweiten Teil im Rahmen semantischer Analysen von empirischen Anzahlaussagen, arithmetischen Gleichungen und Gesetzesaussagen angewendet werden. Das Ziel dieser Analysen wird in der Ermittlung von Wahrheitsbedingungsangaben bestehen, welche die Verifikationsregeln der fraglichen Aussagen in akkurater Weise kodifizieren. Auf dieser Grundlage sollen dann im dritten und letzten Teil dieser Arbeit Wittgensteins Thesen bewiesen werden. Hierbei wird also durch Bezug auf die im zweiten Teil ermittelten Wahrheitsbedingungsangaben dafür argumentiert werden, dass die Wahrheit mathematischen Aussagen unabhängig von der Wirklichkeitsbeschaffenheit und gleichbedeutend mit der Geltung bestimmter Schlussregeln ist.

Analytisches Inhaltsverzeichnis

1. Wahrheitsbedingungen und Verifikationsregeln

1.1 Die Konzeption der wahrheitskonditionalen Semantik ist nicht grundsätzlich unvereinbar mit der Gebrauchstheorie der Bedeutung. Denn den Sinn einer Aussage zu verstehen, heißt, zu wissen, wann sie behauptbar und also wahr ist. Die Gebrauchstheorie bestimmt allerdings, dass Wahrheitsbedingungsangaben nur dann adäquat sind, wenn sie die tatsächlichen Verifikationsregeln der fraglichen Aussagen kodifizieren.

1.2 Andere Verwendungsweisen von Aussagen – wie insbesondere das Mitteilen – können als spezifische Erweiterungen der grundlegenden behauptenden Verwendungsweisen aufgefasst werden. Die Verwendungsweisen anderer Satzarten – wie etwa Fragen und Befehle – können durch Bezug auf die Verwendung entsprechender Aussagen (Behauptungssätze) erklärt werden.

1.3 Am Beispiel von Vergangenheitsaussagen lässt sich zeigen, dass die verifikationistischen Prinzipien, welche sich aus der gebrauchstheoretischen Konzeption der wahrheitskonditionalen Semantik ergeben, den üblicherweise gegen sie erhobenen Einwänden standhalten.

1.4 Sowohl die analytischen Worterklärungen als auch die hinweisende Erklärungen miteinschließenden praktischen Worterklärungen können als Angaben dafür aufgefasst werden, in welcher Weise die hierdurch erklärten Worte zu den Wahrheitsbedingungen entsprechender Aussagen beitragen.

1.5 Die Angaben von Bezugs- und Zutreffensbedingungen von Namen und Prädikaten für raumzeitliche Gegenstände kodifizieren Regeln für das Anwenden dieser Ausdrücke auf gegebene Gegenstände. Anwendbarkeitsbedingungen dieser Art sind die Wahrheitsbedingungen derjenigen demonstrativen Aussagen, welche durch die Namen und Prädikate gebildet sind.

1.6 Die Wahrheit einer Existenzaussage über raumzeitliche Gegenstände ist äquivalent mit der Existenz eines Ortes, an dem das entsprechende Prädikat anwendbar und somit die daraus gebildete demonstrative Aussage wahr ist. Existenz – im räumlichen Sinn – ist simultane Präsenz an einem beliebigen Ort.

1.7 Auch die Wahrheit von Prädikationen und Identitäten ist äquivalent zur Existenz eines Orts, an dem gleichzeitig entsprechende demonstrative Aussagen wahr sind. Anders als im Fall demonstrativer Aussagen ist die räumliche Suche – und damit der Ortswechsel des Verifizierenden – konstitutiv für die Verifikation von Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten.

1.8 Das Beispiel der Alphabetaussagen zeigt, dass Wahrheitsbedingungsangaben, die allein auf Analysen der logischen Form der fraglichen Aussagen beruhen, zwar implikationsakkurat, jedoch nicht notwendiger Weise verifikationsakkurat sind. Da nicht schon aus den Implikationsregeln,

sondern erst aus den Verifikationsregeln von Aussagen ersichtlich ist, ob und, wenn ja, in welcher Weise diese sich auf die Wirklichkeit beziehen, kann die Frage nach dem darstellenden Charakter der Arithmetik nur auf der Grundlage verifikationsakkurater Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetische Aussagen entschiedenen werden.

2. Tautologien und Implikationen

2.1 Eine Aussage ist genau dann tautologisch, wenn eine Angabe ihrer Wahrheitsbedingungen impliziert, dass sie immer und überall wahr ist.

2.2 Für die Verifikation einer tautologischen Aussage sind keine Wirklichkeitsuntersuchungen, sondern höchstens Verweise auf die Bedeutungserklärungen ihrer Teilausdrücke konstitutiv.

2.3 Welche Aussagen tautologisch sind, kann in einem entsprechenden Verwendungsverzeichnis unter Anderem durch Bezug auf die Angabe von Wahrheitsbedingungen bestimmter formaler Aussagen festgehalten werden.

2.4 Eine Aussage ist genau tautologisch, wenn man bereits durch das Vorgeben, ihre Falschheit festgestellt zu haben, manifestiert, ihre Bedeutung nicht zu verstehen.

2.5 Dass eine Aussage eine Andere impliziere, bedeutet, dass immer und überall die Wahrheit Ersterer eine Bedingung für die Wahrheit Letzterer ist. Sätze, die Implikationsbeziehungen ausdrücken, stellen Schlussregeln und damit alternative Methoden der Wahrheitswertermittlung dar.

3. Philosophie der Logik

3.1 Wittgensteins These, wonach die Logik Begriffe bildet, ist insofern zutreffend, als die Logik, indem sie als gültig erkannte Schlussregeln in Kraft setzt, neue Wahrheitsbedingungen bestimmt und somit die Bedeutungserklärungen entsprechender Aussagen ergänzt.

3.2 Wittgensteins These, wonach die Grammatik einer Sprache autonom ist, ist insofern zutreffend, als das Festsetzen und Ableiten von Verwendungsregeln nicht als ein Darstellen der Wirklichkeit aufgefasst werden kann.

3.3 Auch Quines Definition logischer Wahrheit durch den Begriff der substitutionsinvarianten Wahrheit ist nur dahingehend zu verstehen, dass eine Aussage genau dann logisch wahr ist, wenn sie allein aufgrund der Bedeutung ihrer logischer Teilausdrücke wahr ist.

3.4 Quines Einwände gegen die Rede davon, dass eine Aussage allein aufgrund ihrer Bedeutung wahr sei, beruhen wesentlich auf unangemessenen Interpretationen dieser Redeweisen.

4. Zahlaussagen

4.1 Ob zwei Gegenstände in einer bestimmten Äquivalenzrelation zueinander stehen, kann in dreierlei Weise verifiziert werden: durch den Vergleich der Gegenstände miteinander, durch den Vergleich beider Gegenstände mit einem Maßstab, oder durch den Vergleich der entsprechenden Äquivalenzprädikate, welche auf beide Gegenstände zutreffen.

4.2 Aussagen über die Anzahl und Zahlengleichheit von Begriffen können durch das Nummerieren und durch das Benennen von Gegenständen verifiziert werden. Insbesondere kann, ob zwei Begriffe zahlengleich sind, durch den Vergleich der ihnen zukommenden Anzahloperatoren festgestellt werden.

4.3 Zahlaussagen können ebenfalls durch das wechselseitige Zuordnen von Gegenständen verifiziert werden. Insbesondere kann, ob ein Begriff eine bestimmte Anzahl hat, festgestellt werden, indem festgestellt wird, ob er zahlengleich mit einem Paradigmenbegriff ist.

4.4 Wittgensteins und Freges Erklärung der Anzahloperatoren kodifizieren die Nummerierungsmethode. Die auf dem Benennen basierende Umfangsmethode zur Verifikation von Zahlengleichheitsaussagen kann dadurch kodifiziert werden, dass Humes Prinzip auf extensive Relationen eingeschränkt wird.

4.5 Humes Prinzip kann als (mehr oder weniger adäquat formulierte) Kodifikation der Umfangsmethode verstanden werden. Die Einwände von Waismann und Wittgenstein gegen Humes Prinzip sind nur bedingt berechtigt.

5. Abstrakte Sortale

5.1 Sogenannte abstrakte Sortale wie ‚Farbe', ‚Länge' oder ‚Zahl' drücken in allen gebräuchlichen Sätzen, die durch sie gebildet sind, bestimmte Vergleichsbeziehungen aus.

5.2 Anders als ein konkretes Sortal steht ein abstraktes Sortal nicht für eine bestimmte Gegenstandsart. Hieraus geht hervor, dass die Bedeutung der Ausdrucks ‚identisch' kontextrelativ ist.

5.3 Dass auch abstrakte Sortale für bestimmte Gegenstandsarten stehen, leiten Neologizisten aus einer Syntaxanalyse von Abstraktionsäquivalenzen – wie etwa Humes Prinzip – ab. Auf dieser Grundlage wird dann auch für die Existenz und Zugänglichkeit der entsprechenden abstrakten Gegenstände argumentiert.

5.4 Das neologizistische Projekt ist undurchführbar, weil das Syntaxprioritätsprinzip sowohl mit Humes Prinzip als auch mit allen anderen Abstraktionsäquivalenzen unvereinbar ist.

5.5 Der auch von Neologizisten anerkannte Umstand, dass durch abstrakte Sortale gebildete Aussagen durch Untersuchungen konkreter Gegenstände verifiziert werden, zeigt nicht, dass

auch abstrakte Gegenstände zugänglich sind. Er zeigt vielmehr, dass die Zugänglichkeitsfrage irrigerweise voraussetzt, dass abstrakte Sortale für Arten abstrakter Gegenstände stehen.
5.6 Der Gebrauch des Ausdrucks ‚abstrakter Gegenstand' ist irrerührend. Denn anders als es seine Form suggeriert, werden durch die Unterscheidung konkret/abstrakt nicht Gegenstände gemäß ihrer Art, sondern Ausdrücke gemäß ihrer Verwendung unterschieden.
5.7 Zwar wird die mythologische Vorstellung eines Reichs abstrakter Gegenstände von Neologizisten zu Recht verworfen. In diesem Fall muss dem Nominalismus jedoch das Zugeständnis gemacht werden, dass Längen, Farben oder Zahlen nicht im selben Sinn existieren wie konkrete Gegenstände.

6. Arithmetischer Gleichungen

1. Syntaktische Aussagen können in zeitliche und zeitlose Aussagen unterteilt werden. Erstere behaupten die Anwendbarkeit syntaktischer Prädikate auf bestimmte Zeichenvorkommnisse. Letztere drücken logische Beziehungen zwischen syntaktischen Prädikaten aus.
2. Syntaktische Aussagen handeln nicht von abstrakten Gegenständen. Dies ist gilt auch für Aussagen, welche die Existenz unendlich vieler Zeichen einer bestimmten Art behaupten.
3. Eine Nachfolgeraussage kann als zeitlose, syntaktische Aussage aufgefasst werden, welche die Anwendbarkeit des Nachfolgerprädikats auf die beiden in der Aussage enthaltenen Ziffern behaupten. Die Logik verschiedener Systeme von Nachfolgeraussagen kann durch die ersten vier Peano-Axiome dargestellt werden.
4. Die nominalistische Charakterisierung, wonach arithmetische Gleichungen von Ziffern, und nicht von abstrakten Gegenständen handeln, ist berechtigt. Eine arithmetische Gleichung ist eine syntaktische Aussage, welche behauptet, dass die Umformungen der links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme gemäß der für die Operationszeichen geltenden Eliminierungsregeln zu ein und derselben Ziffer führen.
5. Die zuvor entwickelte syntaktisch-nominalistische Konzeption arithmetischer Gleichungen ergab sich aus der Orientierung an deren Verifikation und nicht, wie im Fall Quines und Goodmans, aus dem Wunsch, bestimmte ontologische Annahmen zu vermeiden.

7. Arithmetischer Gesetze

1. Da sie arithmetische Gleichungen schematisieren, können algebraische Gleichungen als Paradigmen der arithmetisch relevanten syntaktischen Beziehungen verwendet werden. Der algebraische Beweis einer algebraischen Gleichung schematisiert die arithmetischen Beweise der durch die Gleichung schematisierten arithmetischen Gleichungen.

2. Auch der einer algebraischen Gleichung entsprechende induktive Beweis stellt eine dafür Regel dar, die arithmetischen Beweise der durch die Gleichung schematisierten arithmetischen Gleichungen zu konstruieren.
3. Das, was die Behauptung, eine algebraische Gleichung gelte für alle Zahlen behauptet, ist, dass eine Regel konstruierbar ist, durch deren Befolgung jede arithmetische Gleichung bewiesen werden kann, welche durch die algebraische Gleichung schematisiert wird. Da die Begriffe des algebraischen und des induktiven Beweises syntaktischer Natur sind, handelt es sich auch bei arithmetischen Gesetzen um syntaktische Aussagen.
4. Das sogenannte Induktionsaxiom bestimmt – zumindest partiell – den Sinn des Allquantors in der Arithmetik. Und diese Bestimmung ist insofern berechtigt, als das Induktionsschema als allgemeine Regel für die Konstruktion arithmetischer Beweise verwendet werden kann.

8. Die Autonomie arithmetischer Aussagen

8.1 Eine *realistische* Konzeption arithmetischer Aussagen, wonach deren Wahrheit von der Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars auf bestimmte Gegenstände abhängt, ist nicht verifikationsakkurat. Denn ein Anwenden arithmetischer Zeichen auf Gegenstände ist nicht Teil der tatsächlichen arithmetischen Praxis.
8.2 Dem strukturalistischen Einwand gegen den Realismus ist dahingehend recht zu geben, dass die tatsächlichen Verwendungsregeln des arithmetischen Vokabulars durch verschiedene Anwendungsregeln in konsistenter Weise ergänzt werden können.
8.3 Auch wenn Anwendungsregeln für das arithmetische Vokabular angegeben würden, wären die Peano-Axiome nicht als Hypothesen über die Gegenstände des entsprechenden Anwendungsbereichs aufzufassen, sondern als Regeln, die aus den Angaben der Anwendungsregeln abzuleiten wären.
8.4 Auch wenn eine Art Anschauung für abstrakte Gegenstände postuliert wird, kann es kein geregeltes Anwenden von arithmetischen Ausdrücken auf abstrakte Gegenstände geben, da in keinem Fall feststellbar wäre, welchen abstrakten Gegenstand jemand in dieser Weise anschaut.
8.5 Ohne die Annahme einer spezifischen Anschauungsweise für die vermeintlichen abstrakten Gegenstände der Arithmetik, stellt die platonistische Konzeption der Arithmetik keine alternative Position zum Nominalismus, sondern lediglich eine alternative Formulierung dieser Position dar
8.6 Mathematische Aussagen unterscheiden sich von empirischen Aussagen in der Art und Weise ihrer Verifikation, nicht jedoch in dem Sprechakt, der durch ihre Äußerungen vollzogenen wird. Wird unter der Wahrheit einer Aussage deren Behauptbarkeit verstanden, so können empirische und mathematische Aussagen im selben Sinn als ‚wahr' oder ‚falsch' bezeichnet werden.

8.7 Obwohl ihre Wahrheit nicht einfach festgesetzt, sondern festgestellt wird, sind arithmetische Aussagen keiner Wirklichkeit verantwortlich. Denn, ob eine arithmetische Aussage wahr ist, wird nicht durch Wirklichkeitsuntersuchungen, sondern allein dadurch festgestellt, dass die arithmetischen Ausdrücke nach bestimmten syntaktischen Regeln transformiert werden.

9. Arithmetische Aussagen als Darstellungsnormen

9.1 Die Feststellung der Wahrheit einer Gleichung zeigt, dass die Rede von einem Beweis der Gleichung widerspruchsfrei ist. Arithmetische Gleichungen können daher als logische Regeln für die Beschreibung der arithmetischen Rechenpraxis angewendet werden.

9.2 Die außermathematische Anwendung arithmetischer Gleichungen besteht in der Kodifikation von Implikationsregel zwischen Zahlaussagen. Diese Anwendung macht die Arithmetik zur Logik der Anzahloperatoren.

9.3 Die innermathematische Anwendung mathematischer Aussagen besteht in der Abkürzung von Beweisen. Axiomatische Theorien der Mathematik sind Meta-Kalküle, deren Beweise die Beweise anderer Kalküle schematisieren.

9.4 Wittgensteins Kritik am Logizismus und Formalismus erscheint berechtigt: Die außermathematische Anwendung der Arithmetik muss für sich selbst sorgen, auch wenn erst sie das arithmetische Zeichenspiel zur Mathematik macht.

9.5 Wittgensteins These, wonach die Mathematik Begriffe bildet, ist insofern zutreffend, als die Mathematik diejenigen Schlussregeln in Kraft setzt, deren Geltung durch mathematische Beweise eingesehen wurde.

Teil I
Semantische und logische Grundbegriffe

1. Wahrheitsbedingungen und Verifikationsregeln

In diesem einleitenden Kapitel soll das Verhältnis der auf den späten Wittgenstein zurückgehenden Gebrauchstheorie der Bedeutung und der Konzeption der wahrheitskonditionalen Semantik diskutiert werden. Tugendhats Überlegungen in (1976) folgend, soll dabei in den ersten vier Abschnitten zunächst dafür argumentiert werden, dass die Gebrauchstheorie der Bedeutung nicht grundsätzlich unvereinbar mit Konzeption der wahrheitskonditionalen Semantik ist. Die Gebrauchstheorie bestimmt allerdings, dass Wahrheitsbedingungsangaben als Kodifikationen entsprechender Verifikationsregeln aufzufassen sind. Die Adäquatheit spezifischer Wahrheitsbedingungsangaben ist daher stets in diesem verifikationistischen Sinn zu bewerten.

Im Anschluss daran soll in den Abschnitten 1.5-1.7 gezeigt werden, dass die üblichen auf Tarski zurückgehenden Wahrheitsbedingungsangaben für elementare empirische Aussagen geringfügiger Modifikationen bedürfen, um im geforderten Sinn verifikationsakkurat zu sein. Die Wahrheitsbedingungen anderer Aussagen werden üblicherweise nach dem Vorbild der Wahrheitsbedingungsanagaben für empirische Aussagen formuliert. In 1.8 soll jedoch anhand des Beispiels von Aussagen über die Reihenfolge von Buchstaben im Alphabet gezeigt werden, dass dieses Vorgehen nicht notwendigerweise zu verifikationsakkuraten Wahrheitsbedingungsangaben führt. Diese Überlegung wird verdeutlichen, dass die Wittgensteinsche Autonomiethese, der zu Folge mathematische Aussagen nicht die Wirklichkeit darstellen, nicht durch Verweise auf syntaktische Analogien zwischen mathematischen und empirischen Aussagen entschieden werden kann. Vielmehr verlangt eine solche Entscheidung eine Untersuchung der Verifikation mathematischer Aussagen. Untersuchungen dieser Art sollen dann in den Kapitel 6 und 7 immerhin für arithmetische Aussage vorgenommen werden.

1.1 Bekanntermaßen besteht nach Wittgenstein die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Gebrauch (PG, §23; PU, §43). Denn es ist der Gebrauch eines Ausdrucks, den die Bedeutungserklärung des Ausdrucks erklärt. Und ebenso heißt, die Bedeutung eines Ausdrucks zu verstehen, seinen Gebrauch zu kennen.[1] In diesem Abschnitt soll nun mit Tugendhat dafür argumentiert werden, dass dieser Grundsatz mit dem Grundsatz der wahrheitskonditionalen Semantik vereinbar ist, wonach der Sinn einer Aussage in ihren *Wahrheitsbedingungen* besteht (vgl. Tugendhat, (1976) VL 15/16). Als *Aussagen* seien dabei sowohl hier als auch im Folgenden Behauptungssätze wie etwa ‚Es regnet' oder ‚Das Berliner Rathaus ist rot' verstanden. Psychologische Sätze in der ersten Person Präsens wie z.B. ‚Ich habe Schmerzen' seien dagegen nicht zu den Aussagen gerechnet.

Dass – und inwiefern – Tugendhats Vereinbarkeitsthese berechtigt ist, soll in zwei Schritten gezeigt werden. In einem ersten Schritt ist die Rede vom Gebrauch bzw. von der Verwendungsweise einer Aussage zu klären. Tugendhat folgend kann hierbei kann zunächst der im nächsten Abschnitt noch weiter verteidigende Grundsatz unterstellt werden, dass im *Behaupten* von Aussagen deren grundlegende Verwendungsweise besteht (vgl. Tugendhat 1976, S. 238). Das hiernach für das Verstehen einer Aussage ‚p' grundlegende Behaupten von ‚p' kann nun offenbar nicht einfach nur darin bestehen, ‚p' zu äußern, sondern muss vielmehr in einer näher zu bestimmenden Weise auf die Korrektheit einer solchen Äußerung, also auf die *Behauptbarkeit* von ‚p' bezogen werden. Tugendhats sogleich darzustellende Erklärung des Behauptens kann durch Überlegungen dazu motiviert werden, worin sich das Verstehen des Sinns einer Aussage ‚p' manifestiert. Offenbar manifestiert dieses sich weder darin, ‚p' *nur dann* zu äußern, wenn ‚p' behauptbar ist, noch darin, ‚p' nur dann zu äußern, wenn man bereits *erkannt* hat, dass ‚p' behauptbar ist.[2] Korrekt erscheint dagegen die Auffassung, dass man ‚p' dann und nur dann versteht, wenn man bereit ist, eine Äußerung von ‚p' zurückzunehmen, sobald man erkannt hat, dass die Äußerung inkorrekt und ‚p' in diesem Sinn nicht behauptbar ist. So kann also etwa nur demjenigen das Verstehen der Aussage ‚Es regnet' zugesprochen werden, der ihre Äußerung zurücknimmt, nachdem er – etwa durch einen Blick aus dem Fenster – festgestellt hat, dass es nicht regnet. Das Verstehen von ‚p' manifestiert sich also erst in weiteren, auf die Äußerung von ‚p' bezogenen Handlungen, nämlich der Feststellung der Behauptbarkeit von ‚p' zum einen und entsprechenden *bewertenden* Äußerungen zum anderen. Der Einfachheit halber sei dabei im Folgenden angenommen, dass die festgestellte Inkorrektheit einer Aussageäußerung jeweils durch

[1] Für eine Diskussion von hier nicht näher zu untersuchenden Einwänden gegen die Gebrauchstheorie der Bedeutung siehe Schroeder 2006, Kap. 4.4.
[2] Diese zweite, von Tugendhat auf S. 225 ff. von (1976) kritisierte Auffassung wird etwa von Skorupski (in 1999, S. 32) nahegelegt.

das Äußern von ‚nein' und die festgestellte Korrektheit durch das Äußern von ‚ja' bewertet werden.

Aus der Kombination dieser drei Handlungen ergibt sich nun das von Tugendhat sogenannte *Behauptungsspiel*, welches sich wie folgt darstellen lässt:[3]

(1) In einem ersten Schritt wird eine Aussage ‚p' geäußert.

(2) Dann wird in einem zweiten Schritt festgestellt, ob ‚p' behauptbar ist.

(3) Falls sich hierbei herausstellt, dass ‚p' behauptbar ist, wird ‚ja' geäußert; falls sich herausstellt, dass ‚p' nicht behauptbar ist, wird ‚nein' geäußert.

Nach Tugendhat besteht die assertorische (bzw. behauptende) Verwendungsweise einer Aussage somit in der Praktizierung dieses Behauptungsspiels, welches im Folgenden auch als das *Entscheidungsspiel* bezeichnet sei. Durch Bezug auf dieses Entscheidungsspiel definiert er dann den *Sprechakt* des Behauptens durch die folgende Bestimmung: ‚p' zu behaupten, bedeutet, ‚p' als Eröffnungszug des Entscheidungsspiel zu äußern. Und da sich das Entscheiden *verschiedener* Aussagen nur hinsichtlich deren jeweiliger Behauptbarkeitsfeststellungen unterscheidet, kann man sagen, dass eine Aussage zu verstehen, bedeutet, zu wissen, wovon ihre Behauptbarkeit abhängt (vgl. Tugendhat 1976, S. 262).

Nun gibt es jedoch eine alternative, von Tugendhat nicht berücksichtige Art und Weise, das Wissen darum zu manifestieren, wovon die Behauptbarkeit von ‚p' abhängt. Diese besteht darin, dass ‚p' *im Anschluss* an die Feststellung geäußert wird, dass ‚p' behauptbar ist. So manifestiert sich etwa das Wissen darum, dass die Behauptbarkeit von ‚Es regnet' davon abhängt, ob es an der Raumzeitstelle der Äußerung regnet, auch darin, dass ‚Es regnet' nicht *vor*, sondern *nach* der Regenfeststellung geäußert wird. Aus diesem Grund kann vom Entscheidungsspiel also ein zweites, ebenso grundlegendes Behauptungsspiel unterschieden werden, welches sich wie folgt gestaltet:

(1) Im ersten Schritt wird festgestellt, dass ‚p' behauptbar ist.

(2) Dann wird in einem zweiten und letzten Schritt ‚p' geäußert.

Dieses Behauptungsspiel sei im weiteren Verlauf als *Erzeugungsspiel* bezeichnet. Tugendhats Konzeption von Aussagen und dem Sprechakt des Behauptens ist also dahingehend zu modifizieren, dass es nicht nur ein, sondern zwei grundlegende Behauptungsspiele gibt, in deren

[3] Tugendhat konzipiert sein Behauptungsspiel zwar zunächst für *zwei* Spieler (vgl. 1976, S. 259). Die folgende Darstellung entspricht der von Tugendhat auf S. 270 angedeuteten Modifikation dieses Spiels für einen Spieler. Auf die Variante für zwei Mitspieler soll im nächsten Abschnitt noch eingegangen werden.

Praktizierung sich das Verstehen von Aussagen manifestiert; nämlich das Entscheiden und das Erzeugen von Aussagen. Und der Sprechakt der Behauptung sollte demnach durch die Bestimmung erklärt werden, dass eine Aussage ‚p' zu behaupten, bedeutet, ‚p' entweder als Eröffnungszug des Entscheidungsspiels oder als Endzug des Erzeugungsspiels zu äußern.

Der zweite Schritt in der Überführung der Gebrauchsauffassung in die wahrheitskonditionale Auffassung besteht nun darin, die *Wahrheit* einer Aussage als deren *Behauptbarkeit* zu explizieren. Diese Explikation kann also durch die folgende Bestimmung festgehalten werden: „„p" ist wahr' bedeutet: ‚p' ist behauptbar.[4] Dieser Schritt erscheint zum einen insofern berechtigt, als die Rede von der Wahrheit von Aussagen im Rahmen wahrheitskonditionaler Semantiken in diesem Sinn aufzufassen zu sein scheint. Zum anderen scheint es, dass der Ausdruck ‚wahr' auch umgangssprachlich in etwa dasselbe wie der Ausdruck ‚behauptbar' bedeutet (vgl. Rundle 1979, S. 371 ff.). Da eine entsprechende Untersuchung des umgangssprachlichen Gebrauchs von ‚wahr' hier jedoch zu weit führen und wohl auch Abweichungen zu dem hier intendierten Gebrauch offenbaren würde, sei die Erklärung von Wahrheit als Behauptbarkeit dennoch als eine *Explikation* und nicht als eine *Analyse* der umgangssprachlichen Rede eingestuft.

Gemäß dieser Explikation sind also die Bedingungen für die Wahrheit einer Aussage die Bedingungen dafür, ob eine Äußerung der Aussage zurückzunehmen oder zu bekräftigen ist. Da die Wahrheitsbedingungen einer Aussage in dieser Weise deren assertorische Verwendungsweise bestimmen, ist also die Gebrauchstheorie der Bedeutung mit dem Grundsatz der wahrheitskonditionalen Semantik vereinbar, wonach die Bedeutung einer Aussage in ihren Wahrheitsbedingungen besteht. Und man kann sagen, dass die Bedeutung einer Aussage zu verstehen bzw. zu erklären, bedeutet, die Wahrheitsbedingungen der Aussage zu kennen bzw. anzugeben.

Die Explikation von Wahrheit als Behauptbarkeit impliziert ferner, dass die sowohl für das Erzeugen als auch für das Entscheiden einer Aussage konstitutive *Behauptbarkeitsfeststellung* als die *Verifikation* der fraglichen Aussage bezeichnet werden kann. Denn gemäß der Explikation heißt, die Behauptbarkeit einer Aussage ‚p' festzustellen, festzustellen, ob ‚p' wahr ist, oder, gleichbedeutend damit, ob die Wahrheitsbedingungen von ‚p' erfüllt sind. Die *Angaben der Wahrheitsbedingungen* bestimmter Aussagen sind damit in jedem Fall als *Angaben der Verifikationsregeln* der fraglichen Aussagen aufzufassen; also als Darstellung der Regeln, durch

[4] Es ist dafür argumentiert worden, dass Formulierungen wie „„p" ist wahr' oder „„p" ist zum Zeitpunkt t wahr' nur als Abkürzungen von Aussagen der Form ‚Das, was durch „p" behauptet wird, ist wahr' bzw. ‚Das, was „p" zum Zeitpunkt t behauptet wird, ist wahr' verstanden werden können (vgl. z.B. Glock 2003, S. 118-126). Auf diese Diskussion kann hier nicht weiter eingegangen werden. Im Folgenden sollen zwar stets die einfachen Formulierungen gebraucht werden. Im Prinzip könnten diese Formulierungen jedoch stets durch die entsprechenden komplexeren Formulierungen ersetzt werden.

deren Befolgung festgestellt wird, ob das Äußern der fraglichen Aussagen korrekt oder inkorrekt ist. Dementsprechend kann das Angeben von Wahrheitsbedingungen als das Erstellen eines Regelverzeichnisses für die Verwendung der entsprechenden Aussagen aufgefasst werden, auf dessen Grundlage das Erzeugen und Entscheiden dieser Aussagen erklärt, kritisiert und gerechtfertigt werden kann.

In Bezug auf Aussagen, die bereits verwendet werden und deren Verwendung daher durch entsprechende Wahrheitsbedingungsangaben nicht erst *festgesetzt*, sondern nur nachträglich *kodifiziert* werden soll, gilt daher, dass entsprechende Wahrheitsbedingungsangaben nur dann als *adäquat* gelten können, wenn sie diejenigen Regeln darstellen, nach denen die fraglichen Aussagen tatsächlich verifiziert werden. Man kann also sagen, dass sich aus der Gebrauchstheorie der Bedeutung eine Adäquatheitsbedingung für wahrheitskonditionale Semantiken ergibt. Hiernach müssen Wahrheitsbedingungsangaben gebräuchlicher Aussagen in dem Sinn *verifikationsakkurat* sein, dass sie diejenigen Bedingungen angeben, deren Erfülltsein festgestellt wird, wenn festgestellt wird, ob entsprechende Aussageäußerungen zurückzunehmen oder zu bekräftigen sind.

1.2 Wittgenstein und viele, die ihm folgten betonen oftmals, dass es viele in Form, Komplexität und Zweck variierende Sprachspiele gibt. Und insofern *Kommunikation* ein wesentlicher Zweck von Sprache zu sein scheint, liegt insbesondere die Idee nahe, dass gerade Sprachspiele für *mehrere* Mitspieler semantisch relevant sein müssten. Nun sind die beiden durch die Wahrheitsbedingungen einer Aussage bestimmten Sprachspiele des Entscheidens und des Erzeugens der fraglichen Aussage insofern nicht kommunikativer Art, als sie lediglich für *einen* Spieler konzipiert sind. Da es, wie sogleich anhand entsprechender Beispiele illustriert werden soll, jedoch durchaus kommunikative Sprachspiele mit Aussagen gibt, stellt sich also Frage, ob die Bedeutung einer Aussage durch ihre Wahrheitsbedingungen hinreichend bestimmt ist, oder ob es für ihren Gebrauch noch andere semantisch relevante Regeln gibt. In Sprachspielterminologie ausgedrückt, lautete diese Frage also: ist die Beherrschung des Erzeugungs- und des Entscheidungsspiel *hinreichend* dafür, die Bedeutung einer Aussage zu verstehen, oder müssen hierfür auch andere, eventuell kommunikative Sprachspiele beherrscht werden? Dass dies nicht der Fall ist, soll in diesem Abschnitt anhand der Analyse zweier Zwei-Spieler Sprachspiele mit Aussagen gezeigt werden, welche es zunächst darzustellen gilt.

Das erste dieser beiden Sprachspiele, welches im Folgenden als das *Wettspiel* bezeichnet sei, entspricht in etwa dem von Tugendhat auf S. 259 (1976) beschriebenen Behauptungsspiel für zwei Mitspieler und kann wie folgt dargestellt werden:

(1) Das Wettspiel wird zunächst dadurch eröffnet, dass Spieler 1 eine bestimmte Aussage und Spieler 2 deren Negation äußert.
(2) Im zweiten Schritt verifizieren dann beide Spieler gemeinsam die fragliche Aussage (und damit auch deren Negation).
(3) Daraufhin gibt im dritten und letzten Schritt derjenige Spieler dem anderen Spieler recht, dessen Aussage sich im Schritt zuvor als falsch herausgestellt hat.

Zu einer Wette im eigentlichen Sinn würde zwar auch eine Bonifikation gehören, die der Spieler, der Unrecht hatte dem anderen Spieler zu Teil werden lässt; von diesem Aspekt kann in diesem Zusammenhang jedoch abgesehen werden. Wird angenommen, dass in der Weise recht gegeben wird, dass der Ausdruck ‚Du hattest recht' geäußert wird, so würde sich also zum Beispiel das Wettspiel mit der Aussage ‚Es regnet' wie folgt darstellen. Zunächst wird das Spiel dadurch eröffnet, dass der eine Mitspieler ‚Es regnet' und der andere ‚Es regnet nicht' äußert. Anschließend schauen beide aus dem Fenster, um die Wetterlage zu beobachten. Sollte sich dabei herausstellen, dass es regnet, äußert der Mitspieler ‚Du hattest Recht', der zu vor ‚Es regnet nicht' geäußert hat. Anderenfalls macht der andere Mitspieler diese Äußerung.

Die Frage, ob das Wettspiel *semantisch relevante* Regeln beinhaltet, welche über die Wahrheitsbedingungen hinausgehen, ist nun dadurch zu beantworten, dass jeder Schritt dieses Spiels, der nicht – oder zumindest nicht ausschließlich – durch die Wahrheitsbedingungen der jeweiligen Aussage reguliert ist, daraufhin untersucht wird, ob die Regel, durch die er reguliert ist, in dem Sinn relevant für die Bedeutung der Aussage ist, dass bei einem entsprechenden Regelverstoß dem Betreffenden das Verstehen der Bedeutung der Aussage – bzw. bestimmter ihrer Teilausdrücke – abgesprochen werden müsste.

Der erste Schritt des Wettspiels leitet dieses lediglich ein und ist insofern gar nicht reguliert. So kann man etwa ‚Es regnet' und ‚Es regnet nicht' äußern, wann immer man das fragliche Spiel praktizieren will. Sowohl der zweite als auch der dritte Schritt des Wettspiels ist dann durch die Wahrheitsbedingungen der geäußerten Aussagen bestimmt. So ergibt sich etwa daraus, dass ‚Es regnet' an einer bestimmten Raumzeitstelle genau dann wahr ist, wenn es an dieser Raumzeitstelle regnet, dass im zweiten Schritt des entsprechenden Wettspiels zunächst das Wetter zu beobachten und im dritten Schritt auf diese Beobachtung durch die entsprechende Äußerungsbewertung zu reagieren ist. Regelverstöße sind hierbei also nur als Unkenntnis der Wahrheitsbedingungen der fraglichen Aussage zu verstehen: wer nicht das Wetter beobachtet, hat nicht verstanden, dass die Wahrheit von ‚Es regnet' wetterabhängig ist. Und wer die Wetteräußerung nicht in geeigneter Weise bewertet, sondern etwa lediglich affektiv auf die Wetterbeobachtung reagiert, der hat nicht verstanden, dass die durch die Wahrheitsbedingungen bestimmte Äußerungskorrektheit dieser Ausdrücke, sprecherunabhängig ist. Das Wettspiel ist also durch keine über die Wahrheitsbedingungen der fraglichen Aussage hinausgehenden Regeln bestimmt, also insbesondere durch keine semantisch relevanten Regeln dieser Art.

Der Punkt, dass die semantisch relevanten Regeln des Wettspiels ebenso wie des Erzeugungs- und die des Entscheidungsspiels bereits durch die Wahrheitsbedingungen der entsprechenden Aussagen bestimmt sind, kann im Übrigen auch durch die Beobachtung eingesehen werden, dass das Praktizieren des Wettspiel mit einer bestimmten Aussage im Wesentlichen darin besteht, dass beide Mitspieler die Entscheidungsspiele mit der Aussage bzw. deren Negation praktizieren. Das Wettspiel kann also als die auf zwei Spieler zugeschnittene Variante des Entscheidungsspiels aufgefasst werden.

Als zweites kommunikatives Sprachspiel sei nun das im Folgenden als *Mitteilungsspiel* bezeichnete Sprachspiel betrachtet. Es seien dabei zwei Varianten dieses Spiels unterschieden, von denen eine als Erweiterung des Erzeugungsspiels und die andere als Erweiterung des Entscheidungsspiels aufgefasst werden kann. Die auf dem Erzeugen basierende Form des Mitteilens bestehe zunächst einfach darin, dass die Erzeugung einer Aussage an einen bestimmten Hörer *adressiert* wird. In dieser Variante würde sich das Mitteilungsspiel als wie folgt gestalten:

(1) Im ersten Schritt verifiziert Spieler 1 eine bestimmte Aussage.
(2) In Abhängigkeit vom Verifikationsergebnis äußert Spieler 1 daraufhin entweder diese Aussage selbst oder aber deren Negation gegenüber Spieler 2.

Bei der auf dem Entscheidungsspiel basierenden Variante des Mitteilens handelt es sich um eine Art Frage-Antwort Spiel, welches sich wie folgt gestaltet:

(1) Das Spiel wird zunächst dadurch eröffnet, dass Spieler 2 einen der Aussage entsprechenden Fragesatz äußert.
(2) In einem zweiten Schritt verifiziert daraufhin Spieler 1 *allein* die fragliche Aussage.
(3) In Abhängigkeit vom Verifikationsergebnis äußert Spieler 1 in einem dritten Schritt entweder diese Aussage selbst oder aber deren Negation gegenüber Spieler 2.
(4) Im vierten und letzten Schritt reagiert Spieler 2 auf die diese Äußerung mit einem konventionalisierten Ausdruck der Zufriedenheit, also etwa mit der Äußerung des Ausdrucks ‚Danke'.

In dieser Variante würde also etwa das Mitteilungsspiel mit der Aussage ‚Es regnet' zunächst dadurch eröffnet, dass der eine Mitspieler die entsprechende Frage ‚Regnet es? ' äußert. Der andere Mitspieler schaut daraufhin aus dem Fenster, um dann, abhängig von der dabei beobachteten Wetterlage, entweder ‚Es regnet' oder ‚Es regnet nicht' zu äußern. Schließlich reagiert der Fragesteller diese Äußerung dadurch, dass er seinerseits den Ausdruck ‚Danke' äußert. Diese Variante des Mitteilungsspiel basiert also insofern auf dem Entscheidungsspiel, als Spiel 1 hierbei in den Schritten (2) und (3) im Prinzip die Aussagen entscheidet, welche dem von Spieler 2 in Schritt (1) geäußerten Frageausdruck entspricht.

Vor der Analyse des Mitteilungsspiels seien noch zwei hierauf bezogene Punkte angemerkt. Zum einen ist darauf hinzuweisen, dass sich das Mitteilen *iterieren* lässt. D.h.: man kann auch dann von einem Mitteilen reden, wenn jemand die Äußerung einer ihm selbst nur mitgeteilten Aussage an einen Hörer richtet; also einer Aussage, deren Wahrheit er, der Mitteilende, nicht selbst festgestellt hat.[5] Zum anderen ist zu bemerken, dass das Mittelungsspiel gegenüber dem Wettspiel *praktisch* gesehen natürlich das deutlich *wichtigere* Sprachspiel ist. Hierbei ergibt sich der wesentliche Zweck des Mitteilens daraus, dass der Adressat der Mitteilung einer bestimmten Aussage aus dieser Mitteilung diejenigen praktischen Konsequenzen zieht, die er auch dann gezogen hätte, wenn er selbst die Wahrheit der fraglichen Aussage festgestellt hätte. Sofern er den Mitteilenden als zuverlässigen Informanten betrachtet, wird etwa der Adressat der Regenmitteilung hierauf so wie auf die Regenfeststellung selbst reagieren; also etwa in der Weise, dass er vor dem Verlassen des Hauses zum Regenschirm greift. Mitteilungen erlauben es ihren Adressaten also, auf die Verifikationen der mitgeteilten Aussagen zu verzichten. Und in dieser Art der *Verifikationsersparnis* besteht der Witz des Mitteilens. Man könnte daher sagen, dass sich die *kooperative* Komponente, die man intuitiv mit der Rede von *Kommunikation* verbinden würde, erst im Mitteilungsspiel – und nicht schon im Wettspiel – findet. Denn durch das wechselseitige und iterierte Mitteilen konstituieren sich Kommunikationsgemeinschaften, die es ihren Mitgliedern erlauben, in Abhängigkeit von der Wirklichkeitsbeschaffenheit Einstellungen einzunehmen und Entscheidungen zu treffen, auch ohne entsprechende Wirklichkeitsuntersuchungen in jedem Fall selbst vorzunehmen.

Der Einfachheit halber sei an dieser Stelle nur die auf dem Entscheidungsspiel basierende Variante des Mitteilungsspiels analysiert. Diese Analyse ist zwar etwas komplizierter als die des Wettspiels, stellt sich in Teilen aber analog dar. Zunächst ist auch der erste Schritt dieses Spiels insofern nicht reguliert, als auch das Stellen einer Frage im Prinzip immer zulässig ist. So kann Spieler 2 allein durch die Äußerung etwa von ‚Regnet es?' noch keinerlei Verstehen oder

[5] Das Iterieren von Mitteilungen erfordert dabei unter Umständen natürlich bestimmte Modifikation der mitgeteilten Aussagen wie Veränderungen von Zeitformen oder Ersetzungen deiktischer Ausdrücke.

Missverstehen manifestieren. Der zweite Schritt, in dem Spieler 1 diejenige Aussage zu verifizieren hat, welche der ihm zuvor gestellten Frage entspricht, ist insofern durch die Verwendungsregeln der Frage – und nicht durch die der Aussage – reguliert, als Spieler 1 dadurch, dass er an dieser Stelle nicht mit der erforderlichen Verifikation reagiert, zunächst nur zeigen würde, dass er die Bedeutung der Frage nicht versteht. Wer etwa auf die Regenfrage nicht durch eine Wetterbeobachtung reagiert, würde damit das Missverstehen der Bedeutung dieser Frage manifestieren.[6] Dass Spieler 1 die Bedeutung der entsprechenden Aussage – in diesem Fall also ‚Es regnet' – nicht versteht, würde sich dagegen erst im darauffolgenden dritten Schritt zeigen; nämlich dadurch, dass er an dieser Stelle entweder die Aussage selbst oder ihre Negation ohne vorherige Wetterbeobachtung äußert, oder aber dadurch, dass er trotz vorheriger Wetterbeobachtung diejenige dieser beiden Aussage äußert, welche die Wetterbeobachtung als falsch erwiesen hat. Sollte er dagegen an diesem Punkt gar keine oder aber eine andere Aussage äußern, so würde dies wieder lediglich dagegen sprechen, dass er die Bedeutung der ihm gestellten Frage nicht versteht. Der vierte und letzte Schritt ist wiederum durch die Verwendungsregel der Frage reguliert, insofern es deren Verwendungsregel ist, welche Spieler 2 an dieser Stelle darauf verpflichtet, auf die Äußerung der fraglichen Aussage bzw. der ihrer Negation Seitens Spieler 1 durch geeigneten positiven Affekt zu reagieren. Wird etwa die erfüllte Bitte um Antwort auf die Regenfrage nicht in dieser Weise honoriert, so ist fraglich, ob der Fragesteller die Bedeutung der gestellten Frage versteht. Das Mitteilungsspiel mit einer bestimmten Aussage ist also zwar durch Regeln definiert, welche über die Wahrheitsbedingungen der Aussage hinausgehen, jedoch sind diese Regeln nicht für die Bedeutung der Aussage, sondern nur für die Bedeutung der ihr entsprechenden Frage relevant. Denn während im zweiten und dritten Schritt dieses Spiels Spieler 1 lediglich das durch die Wahrheitsbedingungen der fraglichen Aussage bestimmte Erzeugungsspiel praktiziert, könnte sich in den anderen Schritten nur zeigen, dass Spieler 2 die Bedeutung der Frage missversteht.

Mit Blick auf die Frage danach, ob der Sinn einer Aussage bereits durch ihre Wahrheitsbedingungen hinreichend bestimmt ist, kann somit das folgende Fazit gezogen werden. Es ist zwar nicht falsch – und in bestimmten Zusammenhängen wohl auch relevant –, darauf hinzuweisen, dass sich die Verwendung einer Aussage insofern nicht in ihrer Erzeugung und ihrer Entscheidung erschöpft, als Aussagen im Allgemeinen auch im Rahmen komplexerer und insbesondere kommunikativer Sprachspiele verwendet werden können. Die zuvor angestellten Betrachtungen zweier solcher Sprachspiele zeigen jedoch, dass aus dieser Möglichkeit nicht schon folgt, dass diejenigen Regeln solch komplexerer Sprachspiele, welche nicht durch die

[6] Um in einem solchen Fall auf das Missverstehen schliessen zu können, müsste natürlich ferner der Wille zur Beantwortung der Frage unterstellt werden.

Wahrheitsbedingungen der Aussage bestimmt sind, auch für die Bedeutung der Aussage relevant sind. Dabei wurde durch die Analyse der beiden Sprachspiele deutlich, inwiefern solche Regeln semantisch irrelevant sein können.

Dafür, dass Sprachspielregeln, welche über die Wahrheitsbedingungen einer Aussage hinausgehen, für deren Bedeutung grundsätzlich nicht semantisch relevant sein können, kann jedoch auch unabhängig von solchen Analysen in der folgenden Weise argumentiert werden. Wenn Zweifel darüber bestehen sollten, ob jemand die Bedeutung einer Aussage versteht, dann wird das Verständnis des Betreffenden dadurch überprüft, dass man ihn die Aussage erzeugen bzw. entscheiden lässt. Wollte man zum Beispiel feststellen, ob jemand die Bedeutung der Aussage ‚Es regnet' versteht – etwa um zu prüfen, ob er für die Einführung in komplexere Sprachspiele bereit ist –, so würde man sich darauf beschränken festzustellen, ob er dazu fähig, diese Aussage in Abhängigkeit geeigneter Wahrnehmungen zu äußern bzw. eine solche Äußerung zu bewerten. Und insofern das korrekte Erzeugen und Entscheiden einer Aussage dafür hinreichend ist, den fraglichen Verständnistest zu bestehen, kann also einschränkungslos an dem Grundsatz festgehalten werden, dass die Bedeutung einer Aussage durch ihre Wahrheitsbedingungen hinreichend bestimmt ist.

An die in diesem Abschnitt diskutierte Frage nach dem Sinn von Behauptungssätzen (Aussagen) würde sich unmittelbar die Frage nach dem Sinn von Sätzen anderer Art wie etwa *Aufforderungssätzen* und *Fragen* anschließen. Da in Bezug auf diese Sätze nicht von Wahrheit oder Verifikation gesprochen werden kann, wird deren Integration in wahrheitskonditionale Semantiken typischerweise als problematisch betrachtet (vgl. z.B. Lycan 2000, S. 140; Morris 2007, S. 190). Auch wenn eine ausführliche Diskussion an dieser Stelle zu weit führen würde, soll der Frage nach dem Sinn von Aufforderungen und Fragen dennoch nicht ganz ausgewichen und zumindest eine Antwort skizziert werden. Hierbei soll wieder Tugendhats Ausführungen gefolgt werden (vgl. 1976, Kap. 28).

Nach Tugendhat können Sätze im Allgemeinen in zwei Klassen unterteilt werden: *theoretische* und *praktische*. Hierbei identifiziert Tugendhat die Behauptungssätze mit den theoretischen Sätzen; zu den praktischen Sätzen zählt er neben den Wunschsätzen auch die Aufforderungen und Fragen. Nach Tugendhat zeigt nun zunächst jeder Satz, wie es sich verhält, wenn er mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Und ein theoretischer Satz sagt dann, dass es sich so verhält, wohingegen ein praktischer Satz sagt, dass es sich so verhalten möge. In welcher Weise sich dieser Unterschied in der *Verwendung* theoretischer und praktischer Sätze niederschlägt, erläutert Tugendhat an der fraglichen Stelle dann lediglich *metaphorisch*. Hiernach bilde im Fall des theoretischen Satzes die Wirklichkeit, im Fall des praktischen Satzes dagegen der Satz selbst den *Maßstab* für die Übereinstimmung zwischen Satz und Wirklichkeit (vgl. Tugendhat 1976, S.

509ff.). Diese Metapher scheint nur in der Weise zu interpretieren zu sein, dass es im Fall eines theoretischen Satzes dessen Äußerung ist, die in Abhängigkeit von der Übereinstimmung zwischen Satz und Wirklichkeit *bewertet* wird, wohingegen im Fall eines praktischen Satzes die Wirklichkeit in bestimmter Weise bewertet wird. Dass bedeutet, dass im Fall der Feststellung, dass ein praktischer Satz nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt, also nicht dessen Äußerung zurückzunehmen, sondern in bestimmter Weise *affektiv* zu reagieren ist.

Nun gilt, dass jedem praktischen Satz ein Behauptungssatz entspricht, der die Übereinstimmung zwischen dem praktischen Satz und der Wirklichkeit behauptet. In diesem Sinn entspricht dem von Spieler 2 an Spieler 1 gerichteten Aufforderungssatz ‚Mach das Fenster auf!' der Behauptungssatz ‚Spieler 1 macht das Fenster auf'. Und der von Spieler 2 an Spieler 1 gerichteten Frage ‚Regnet es?' entspricht der Behauptungssatz ‚Spieler 1 teilt mir mit, ob es regnet'. Und man scheint nun sagen zu können, dass ein Sprecher das Verstehen des Sinns eines praktischen Satzes in der Weise manifestiert, dass er auf die Verifikation des entsprechenden Behauptungssatzes in geeigneter Weise affektiv reagiert. Sobald also Spieler 2 feststellt, dass Spieler 1 das Fenster nicht öffnet bzw. ihm nicht mitteilt, ob es regnet, müsste er entweder mit einer Wiederholung der Aufforderungs- bzw. Frageäußerung oder aber mit einem natürliche oder konventionellen Ausdruck Frustration reagieren. Dagegen manifestiert der Hörer sein Verstehen des praktischen Satzes in der Weise, dass er die Sprecherreaktion in geeigneter Weise antizipiert. Spieler 1 kann es also zwar unterlassen, dass Fenster zu öffnen bzw. die entsprechende Wettermitteilung zu machen, ohne dass ihm das Verstehen von ‚Mach das Fenster auf!' bzw. ‚Regnet es?' unmittelbar abgesprochen werden muss. Er muss in diesem Fall allerdings mit der Frustration von Spieler 2 im rechnen.

Es ist also zwar trivialer Weise richtig, dass der Sinn von Aufforderungen und Fragen nicht in Wahrheitsbedingungen bestehen kann, weil die Rede von Wahrheit und Falschheit in Bezug auf Sätze dieser Art sinnlos ist. Dennoch konnte – Tugendhat folgend – an dieser Stelle zumindest angedeutet werden, dass es systematische semantische Beziehungen zwischen diesen Aufforderungen und Fragen einerseits und entsprechenden Behauptungssätzen andererseits gibt. Und es scheint, dass diese Beziehungen es erlauben, den Sinn von Aufforderungen und Fragen durch Bezug auf die Wahrheitsbedingungen entsprechender Behauptungssätze zu erklären.

1.3 Es wird üblicherweise angenommen, dass sich aus der Auffassung, dass der Sinn einer Aussage durch ihre Verifikationsmethode bestimmt ist, die beiden folgenden potentiell problematischen Prinzipien ergeben:

(A) Unverifizierbare Aussagen sind sinnlos.

(B) Man versteht genau diejenigen Aussagen, die man verifizieren kann.

In diesem Abschnitt sollen daher verschiedene Deutungen dieser Prinzipien daraufhin untersucht werden, ob sie aus der in den beiden Abschnitten zuvor entwickelten verifikationistischen Konzeption folgen, und inwiefern sie gegebenenfalls tatsächlich eine Schwierigkeit für diese Konzeption darstellen. Wie sich sogleich zeigen wird, bietet es sich an, diese Untersuchung auf die sogenannte Realismusdebatte zu beziehen, welche nun zunächst in groben Zügen und nur so weit, wie es für die Diskussion der verifikationistischen Prinzipien (A) und (B) erforderlich ist, dargestellt werden soll.[7]

Sowohl der *Realismus* als auch die als *Anti-Realismus* bezeichnete Gegenposition teilen zunächst zwei Annahmen, die im Einklang mit der hier vertretenen Position stehen. Dies ist zum einen der Grundsatz der wahrheitskonditionalen Semantik, wonach der Sinn einer Aussage durch ihre Wahrheitsbedingungen bestimmt ist, und zum anderen die gebrauchstheoretische These, der zu Folge sich das Verstehen des Sinns einer Aussage in deren Gebrauch manifestiert. Für beide Positionen ergibt sich daher die im Folgenden als *Manifestierbarkeitsbedingung* bezeichnete Adäquatheitsbedingung für Wahrheitsbedingungsangaben, der gemäß die Wahrheitsbedingungen beliebiger Aussagen jeweils so anzugeben sind, dass sich die Kenntnis dieser Bedingungen im Gebrauch der Aussagen manifestieren kann.

Für die weiteren Untersuchungen sei an dieser Stelle zunächst die in der Realismusdebatte nicht immer explizit getroffene Unterscheidung zwischen *unmittelbarer* und *mittelbarer* Verifikation eingeführt, welche auch für das Verständnis verifikationistischer Semantiken relevant ist. Unter dem mittelbaren Verifizieren einer Aussage ‚p' sei dabei im Wesentlichen das induktive Schließen auf ‚p' oder ‚¬p' verstanden, also das Schließen auf der Grundlage der Feststellung eines Phänomens, welches erfahrungsgemäß mit der Wahrheit oder Falschheit von ‚p' korreliert (vgl. Rundle 1979, S. 457 ff.). In dieser Weise kann etwa die Aussage ‚Es brennt' in der Weise mittelbar verifiziert werden, dass nicht – wie im Fall der unmittelbaren Verifikation – Feuer, sondern lediglich Rauch beobachtet wird. Und analog hierzu kann die mittelbare Verifikation von ‚Es regnet' im Hören des Geräuschs gegen das Fester prasselnder Tropfen bestehen, ohne dass der Regen selbst gesehen wird. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, dass im Prinzip auch das Empfangen einer Mitteilung als mittelbare Feststellung der Wahrheit des Mitgeteilten aufgefasst werden kann. So könnte man also etwa sagen, dass man immer dann, wenn man durch einen Blick in die Zeitung *unmittelbar* die Wahrheit der Aussage ‚In der Zeitung steht, dass p' feststellt, hierdurch mittelbar die Wahrheit von ‚p' feststellt.

[7] Ausführlichere Darstellungen finden sich z.B. bei Miller (2006, Kap. 9) oder Hale (1999).

Der für die Realismusdebatte zentrale Begriff der Verifikationstranszendenz kann durch die Bestimmung definiert werden, dass Wahrheitsbedingungen genau dann *verifikationstranszendent* sind, wenn es unmöglich ist, festzustellen, ob sie erfüllt sind. Durch Bezug auf die zuvor eingeführte Terminologie, kann der Begriff der Verifikationstranszendenz auch in der folgenden Weise expliziert werden: dass eine Aussage verifikationstranszendente Wahrheitsbedingungen hat, ist gleichbedeutend damit, dass sie nicht unmittelbar verifizierbar ist. Der Streitpunkt zwischen Realisten und Anti-Realisten betrifft nun die *Zulässigkeit* verifikationstranszendenter Wahrheitsbedingungsangaben; er betrifft also die Frage, ob solche Wahrheitsbedingungsangaben der Manifestierbarkeitsbedingung genügen können. Nach anti-realistischer Auffassung sind verifikationstranszendente Wahrheitsbedingungsbedingungsangaben deshalb in jedem Fall unzulässig, weil sich das Verstehen von Aussagen stets *nur* im unmittelbaren Verifizieren manifestiert. Dagegen kann sich nach realistischer Auffassung das Verstehen auch in mittelbaren Verifikationen manifestieren kann, weshalb in bestimmten Fällen auch verifikationstranszendente Wahrheitsbedingungsbedingungsangaben zulässig sein können. Der Unterschied zwischen beiden Positionen betrifft also die Frage, ob die Manifestierbarkeitsbedingung auf unmittelbare Verifikationen zu beziehen ist.

Dummett war wohl der erste Vertreter der These, dass *Aussagen über die Vergangenheit* eine insofern problematische Klasse von Aussagen bilden würden, als Realisten und Anti-Realisten für diese Aussagen *verschiedene* Wahrheitsbedingungen befürworten müssten (Dummett 1969). So liegt es zunächst unmittelbar nahe, die Wahrheitsbedingungen von Vergangenheitsaussagen durch Regeln der folgenden Art auf die Wahrheit entsprechender Gegenwartsaussagen in der Vergangenheit zu beziehen (vgl. Higginbotham 2006):

Sei s ein Ort und t ein Tag, dann gilt:

‚Es regnete gestern' ist wahr bei (s,t) ⇔ ‚Es regnet' ist wahr bei (s,t-1)

‚Es regnete' ist wahr bei (s,t) ⇔ Es gibt ein $t'<t$ derart, dass ‚Es regnet' wahr bei (s,t') ist.

Es scheint nun, dass sowohl Realisten als auch Anti-Realisten annehmen, dass die Wahrheitsbedingungen von Vergangenheitsaussagen, wenn sie in dieser Weise nicht auf *gegenwärtige*, sondern auf *vergangene* Evidenz bezogen werden, verifikationstranszendent sind (vgl. z.B. Miller 2002; Hale 2009). Die hinter dieser Annahme stehende Idee scheint dabei die zu sein, dass eine unmittelbare Verifikation in diesem Fällen deshalb unmöglich ist, weil die Feststellung, ob in der Vergangenheit bestimmte Bedingungen erfüllt waren, eine entsprechende „Zeitreise" erfordern würde. Aus diesem Grund werden diese Wahrheitsbedingungsangaben in unterschiedlicher Weise bewertet. Nach realistischer Auffassung sind die auf vergangene Evidenz bezogenen Wahrheitsbedingungsangaben von Vergangenheitsaussagen deshalb zulässig, weil eine mittelbare Verifikation von Vergangenheitsaussagen durch gegenwärtige Evidenz möglich scheint. Dagegen müsste die Wahrheitsbedingungen von Vergangenheitsaussagen nach anti-realistischer Auffassung auf die entsprechenden gegenwärtigen Evidenzen bezogen werden, weil nur diese unmittelbar zugänglich sind.

Beide Positionen erscheinen unhaltbar! So ist zunächst gegen den Realismus darauf hinzuweisen, dass die mittelbare Verifikation in jedem Fall parasitär zur unmittelbaren Verifikation ist. Dass ein Phänomen A induktive (bzw. mittelbare) Evidenz für ein anderes Phänomen B ist, setzt voraus, dass das Korrelieren von Phänomenen beider Arten unmittelbar festgestellt wurde. Nur weil Feuer und Rauch bei vielen Gelegenheiten gemeinsam beobachtet und dadurch die Wahrheit der Aussage ‚Es brennt und es raucht' *unmittelbar* festgestellt wurde, kann die Feststellung der Wahrheit von ‚Es raucht' als *mittelbare* Feststellung der Wahrheit von ‚Es brennt' gelten. Und ebenso setzt der Rückschluss von der gegenwärtige Straßennässe auf Regen in der Vergangenheit voraus, dass die Aussage ‚Es regnete und jetzt ist die Straße nass' bei hinreichend vielen Gelegenheiten unmittelbar als wahr erkannt wurde. Gegenwärtige Phänomene können nur dann als Evidenz für vergangene Phänomene gelten, wenn auch letztere unmittelbar – also ohne die Vermittlung durch gegenwärtige Phänomene – zugänglich sind. Gegen die anti-realistische Auffassung, wonach die Wahrheitsbedingungen von Vergangenheitsaussagen aufgrund der angenommenen Unzugänglichkeit der Vergangenheit, allein auf gegenwärtige Evidenzen zu beziehen sind, ist zu sagen, dass in diesem Fall auch Vergangenheitsaussagen nur über die Gegenwart sprächen. Denn natürlich behauptet eine Aussage stets nicht mehr – und nicht weniger –, als dass ihre Wahrheitsbedingungen erfüllt sind. Aus diesem Grund wäre der Gebrauch des Ausdrucks ‚Vergangenheitsaussage' eigentlich irreführend, da eine Aussage wie ‚Es regnete gestern' keine Behauptung über das gestrige Wetter, sondern über den gegenwärtigen Straßenzustand oder dergleichen wäre.

Richtig an der anti-realistischen Position ist allerdings die Annahme, dass die Angaben von Wahrheitsbedingungen für bestimmte Aussagen, die Regeln für deren unmittelbare Verifikation kodifizieren müssen, da nur diese Regeln semantisch relevant sein können. Und der eigentlich problematische Punkt beider Positionen ist die Annahme der Unzugänglichkeit vergangener Evidenz und die daraus abgeleitete These, dass Aussagen, deren Wahrheitsbedingungen sich auf solche Evidenzen beziehen, nicht unmittelbar verifizierbar sind. Diese Annahme scheint jedoch auf einer Konfusion zwischen dem *Verifizieren* und dem *Entscheiden* einer Aussage zu beruhen. Wenn, wie von realistischer Seite zu Recht behauptet, die Wahrheit von ‚Es regnete gestern' gleichbedeutend mit dem Wahrheit von ‚Es regnet' am Vortag am selben Ort ist, dann besteht die unmittelbare Verifikation von ‚Es regnete gestern' eben darin, am Tag zuvor am selben Ort die Aussage ‚Es regnet' unmittelbar zu verifizieren. Es ist also selbstverständlich möglich, eine solche Vergangenheitsaussage unmittelbar zu verifizieren. Unmöglich – und zwar *begrifflich* unmöglich – ist nur das Entscheiden von Vergangenheitsaussagen. Denn da die Wirklichkeitsuntersuchungen, durch die eine Vergangenheitsaussage unmittelbar verifiziert wird, in der Vergangenheit vorgenommen werden müssen, kann eine Vergangenheitsaussage also nicht *zuerst* geäußert und *im Anschluss* daran unmittelbar verifiziert werden. Vergangenheitsaussagen sind also zwar in diesem Sinn unentscheidbar; sie sind jedoch, wie zuvor erläutert, verifizierbar und insbesondere erzeugbar. So besteht etwa das Erzeugen von ‚Es regnete gestern' darin, diese Aussage zu äußern, nachdem Vortags am selben Ort die Wahrheit der Aussage ‚Es regnete' durch eine entsprechende Wetterbeobachtung festgestellt wurde.[8] Und die Idee, wonach die unmittelbare Verifikation einer Aussage, deren Wahrheitsbedingungen sich auf vergangene Evidenz beziehen, eine entsprechende Zeitreise erforderte, ergibt sich erst dann, wenn das Verifizieren und das Entscheiden von Aussagen nicht auseinander gehalten werden.

Nun zurück zu den beiden verifkationistischen Prinzipien (A) und (B)! Gegen diese Prinzipien wird üblicher Weise durch Verweise auf diejenigen Aussagen argumentiert, welche von Realisten und Anti-Realisten in verschiedener Weise analysiert werden; d.h. also durch Verweise auf Aussagen, die – wie etwa die Vergangenheitsaussagen – zwar offenbar sinnvoll, jedoch zumindest anscheinend nicht unmittelbar verifizierbar sind. Für die Bewertung der verifikationistischen Prinzipen sollen nun zunächst noch zwei Deutungen des Ausdrucks ‚verifizierbar' unterschieden werden. So kann damit, dass eine Aussage verifizierbar ist, einerseits gemeint sein, dass sie eine *Verifikationsmethode* besitzt. Andererseits kann davon reden, dass eine Aussage für einen Sprecher verifizierbar ist, wenn diesem die *Gelegenheit* gegeben ist, die Verifikationsregel der Aussage zu befolgen. Vergangenheitsaussagen sind nun im ersten, kategorischen Sinn verifizierbar, insofern sie, wie soeben erläutert, natürlich eine Verifikationsmethode besitzen. Im zweiten, sprecherrelativen Sinn sind sie jedoch vielfach unverifizierbar, da die Gelegenheit zur Verifikation einer Vergangenheitsaussage nur demjenigen gegeben ist, der sich zum richtigen Zeitpunkt am richtigen Ort befindet. Und hierbei handelt es sich natürlich um einen grundsätzlichen Punkt. Da für die Verifikation empirischer Aussagen die Anwesenheit des Verifizierenden an bestimmten Raumzeitstellen konstitutiv ist, gibt es unter diesen Aussagen natürlich auch solche, die für keinen Menschen verifizierbar sind. Doch auch solche Aussagen – also etwa Aussagen über Ereignisse in der fernen Vergangenheit oder an

[8] In analoger Weise lässt sich dafür argumentieren, dass eine Zukunftsaussage wie ‚Es wird morgen regnen' zwar verifizierbar und entscheidbar, jedoch nicht erzeugbar ist.

unerreichbaren Orten – sind in dem Sinn verifizierbar, dass sie eine Verifikationsregel haben, und dass es daher zumindest nicht sinnlos ist, von ihrer Verifikation zu reden. Unverifizierbar in diesem kategorischen Sinn wären dagegen z.B. diejenigen Aussagen – oder besser vielleicht: Scheinaussagen –, welche auf einem Kategorienfehler in Ryles Sinn basieren. So hat also etwa eine Aussage wie ‚Die Zahl Sieben ist drei Meter lang' insofern keine Verifikationsmethode, als der Subjektausdruck ‚Die Zahl Sieben' keinen Gegenstand bestimmt, auf den die durch den Prädikatausdruck ‚ist drei Meter lang' bestimmte Methode der Längenmessung anwendbar wäre.[9]

Auf diese Grundlage dieser Überlegungen können nun schließlich auch die beiden eingangs dieses Abschnitts formulierten verifikationistischen Prinzipien bewertet werden! In Prinzip (A), dem zu Folge die Verifizierbarkeit einer Aussage ‚p' das Kriterium dafür ist, dass ‚p' sinnvoll ist, ist die Rede von der Verifizierbarkeit offenbar nur im kategorischen Sinn zu interpretieren. Die Verifizierbarkeit, von der hierbei die Rede ist, muss sich also auf die Existenz einer Verifikationsregel, und nicht auf jemandes Gelegenheit der Befolgung dieser Regel beziehen. Aus diesem Grund könnte (A) in der folgenden Weise präzisiert werden:

(A') Aussagen, die keine Verifikationsregel besitzen, sind sinnlos.

In dieser Deutung scheint (A) allerdings durchaus haltbar zu sein. Denn die Abwesenheit einer Verifikationsregel – im Gegensatz zu der Gelegenheit ihrer Befolgung – bedeutet entweder, dass es sich, wie etwa im Fall der auf Kategorienfehlern basierenden Scheinaussagen, nicht um sinnvolle Aussagen handelt. Oder aber es bedeutet, dass es sich bei dem fraglichen Satz – eventuell entgegen dem, was seine grammatische Form vermuten lässt – nicht um eine Aussage, also nicht um einen theoretischen Satz handelt. So könnte man etwa dafür argumentieren, dass es sich z.B. bei ethischen Sätzen nicht um theoretische, sondern um praktische Sätze handelt. In jedem Fall aber sind die populären Einwände gegen der Verifikationismus verfehlt, welche auf empirische Aussagen über Raumzeitstellen verweisen, an die sich kein Mensch begeben hat oder begeben kann, da Aussagen dieser Art nur im sprecherrelativen Sinn unverifizierbar sind. Und diese Unverifizierbarkeit kann im Übrigen auch nur gezeigt werden, indem die Verifizierbarkeit dieser Aussagen im relevanten Sinn, also im Sinn der Existenz einer entsprechenden Verifikationsregel, vorausgesetzt wird.

Im Fall von Prinzip (B), dem zu Folge man genau diejenigen Aussagen versteht, die man verifizieren kann, sind prinzipiell zwei Deutungen möglich. So könnte mit der Rede davon, dass jemand ‚p' verifizieren kann, entweder gemeint sein, dass er die Verifikationsregel von ‚p' kennt,

[9] Wie in Kapitel 2.4 noch näher zu erläutern sein wird, unterscheiden sich auf Kategorienfehlern basierende Aussagen in diesem Punkt von Kontradiktionen wie ‚Es regnet und es regnet nicht'.

oder aber, dass ihm die Gelegenheit der Befolgung dieser Verifikationsregel gegeben ist. Aus dem folgenden Grund kommt nur von diesen beiden Deutungen jedoch nur die Erste in Frage: wie für jede *Fähigkeit*, so gilt auch für das Verstehen des Sinns einer Aussage, dass man diese Fähigkeit nicht nur dann besitzt, wenn einem auch die Gelegenheit zu ihrer Ausübung gegeben ist. Denn die Gelegenheit der Ausübung ist keine Bedingung dafür, die entsprechende Fähigkeit zu besitzen, sondern nur dafür, um festzustellen, ob jemand sie besitzt oder nicht. Prinzip (B) kann somit in der folgenden Weise präzisiert werden:

(B') Man versteht genau diejenigen Aussagen, deren Verifikationsregeln man kennt.

In dieser Deutung scheint auch Prinzip (B) haltbar zu sein. Denn wer eine Aussage bei gegebener Verifikationsgelegenheit nicht – oder: nicht korrekt – verifizieren kann, manifestiert damit nicht nur die Unkenntnis der Verifikationsregeln, sondern auch das Unverständnis der fraglichen Aussage. Und auch umgekehrt, so scheint es, kann demjenigen, der die Kenntnis der Verifikationsregeln einer Aussage durch deren Befolgung manifestiert, das Verstehen der fraglichen zugesprochen werden.

Natürlich stellt sich an dieser Stelle die Frage, wie sich die Kenntnis der Verifikationsregeln einer Aussage und damit deren Verstehen manifestiert, wenn keine Gelegenheit zur Befolgung der Verifikationsregel gegeben werden kann. Die angemessene Antwort auf diese Frage scheint die zu sein, dass sich das Verstehen einer Aussage ‚p' auch in der Weise *kompositional* manifestiert, dass man durch die Verifikation *anderer*, verwandter Aussagen, dass Verstehen der Teilausdrücke von ‚p' und der Art ihrer Kombination in ‚p' manifestiert (vgl. Hale 1999, S. 279 ff.). So manifestiert sich das Verstehen von ‚Es regnete gestern' nicht nur in der unmittelbaren Verifikation dieser Aussage, sondern etwa auch in der unmittelbaren Verifikation der entsprechenden Gegenwartsaussage ‚Es regnet' und der unmittelbaren Verifikation anderer durch den Ausdruck ‚gestern' gebildeter Vergangenheitsaussagen. Somit scheint also letztlich auch das Prinzip (B) akzeptabel, wenn hierbei zum einen mit der Verifikationsfähigkeit die Kenntnis der Verifikationsregeln gemeint ist, und wenn zum anderen angenommen wird, dass sich die Kenntnis der Verifikationsmethode einer Aussage auch darin manifestiert, andere Aussagen derselben Art zu verifizieren.

Zum Abschluss dieses Abschnitts kann das folgende Fazit gezogen werden. Auch wenn die populären Einwände gegen den Verifikationismus, welche sich auf die tatsächliche oder vermeintliche Unverifizierbarkeit sinnvoller Aussagen beziehen, zwar noch nicht definitiv widerlegt wurden, so wurde doch zumindest angedeutet, dass sich diese Einwände auf der Grundlage zweier Unterscheidungen entkräften lassen; nämlich die Unterscheidung verschiedener Satzarten einerseits, und die Unterscheidung verschiedener Deutungen des Ausdrucks ‚verifizierbar' andererseits. Demnach ist dem semantischen Verifikationismus zumindest in der auch von Wittgenstein befürworteten schwachen Formulierung zuzustimmen, wonach Möglichkeit und Art der Verifikation eines Satzes dessen Sinn bestimmen (vgl. PU, §353). Denn zum einen ist die Unterscheidung von Sätzen danach, ob die Rede von ihrer Verifikation sinnvoll oder sinnlos ist, sicherlich semantischer Art. Und zum anderen ist die Fähigkeit, eine Aussage bei gegebener Gelegenheit zu verifizieren, eine Bedingung dafür, die Aussage zu verstehen.

Besser begründet als die auf die Unverifizierbarkeit bestimmter Sätze verweisenden Einwände erscheint dagegen ein anderer Einwand gegen den Verifikationismus in der hier vertretenen Form.[10] Hiernach ist der Sinn einer Aussage durch deren Verifikationsmethode deshalb nicht – oder zumindest nicht in jedem Fall – *hinreichend* bestimmt, weil zum Sinn einer Aussage auch spezifische *Angemessenheitsbedingungen* beitragen können, welche über die Wahrheitsbedingungen der Aussage hinausgehen. So könnte man z.B. dafür argumentieren, dass die beiden Aussagen ‚Es ist wahr, dass er regnet' und ‚Es regnet' zwar in derselben Weise verifiziert werden, dass jedoch die Äußerung von ‚Es ist wahr, dass es regnet' im Gegensatz zu der von ‚Es regnet' nur dann *angemessen*, ist, wenn zuvor bereits von jemandem behauptet wurde, dass es regnet (vgl. Rundle 1979, S. 373). Unterschiede dieser Art sind offenbar insofern semantisch relevant, als sich in der Unkenntnis derartiger Angemessenheitsbedingungen zwar noch kein völliges Missverstehen der fraglichen Ausdrücke, aber doch zumindest ein gewisses Verständnisdefizit manifestiert. Eine mögliche Reaktion auf diesen Einwand bestünde darin, auch Angemessenheitsbedingungen als Wahrheitsbedingungen und damit als verifikationsrelevant aufzufassen. Diese Strategie würde allerdings eine Verschärfung der umgangssprachlichen Rede von ‚wahr' und ‚Verifikation' erfordern, insofern man hiernach also etwa die Aussage ‚Es ist wahr, dass es regnet' auch in den Fällen als falsch klassifizieren müsste, in denen die Aussage ‚Es regnet' zwar wahr ist, aber von niemandem geäußert wurde. Diese leichte Modifikation der Rede von Wahrheit und Verifikation wäre, wenn sie als solche gekennzeichnet wird, zwar nicht grundsätzlich unzulässig. Für die im Rahmen dieser Arbeit verfolgten Zwecke ist dieser Schritt jedoch unnötig, da sich die für die Philosophie der Mathematik relevanten Verwendungsunterschiede zwischen empirischen und mathematischen Aussagen in Unterschieden in der Verifikation dieser Aussagen bestehen.

1.4 Da sie so weit verbreitet ist, kann die Auffassung, dass die Wahrheitsbedingungen *beliebiger* Aussagen so, wie von Tarski in (1933) vorgeschlagen, anzugeben sind, als die *Standardauffassung*

[10] Der folgende Einwand findet sich implizit bei Rundle 1979, S. 394 ff..

der wahrheitskonditionalen Semantik bezeichnet werden. Aussagen sind hiernach stets aus Worten gebildet, welche sich ihrerseits in logische und inhaltliche Worte unterscheiden lassen. Das *logische* Vokabular setzt sich dabei aus Wahrheitsfunktionen, Quantoren und dem Identitätszeichen zusammen. Das *inhaltliche* Vokabular besteht dagegen aus Namen und Prädikaten. Die atomaren Aussagen – also Aussagen, die nicht durch Wahrheitsfunktionen aus anderen Aussagen gebildet sind – bilden Existenzaussagen, Prädikationen, Identitäten. Im Folgenden sollen die logischen Worte (bzw. Ausdrücke) und dementsprechend auch die hieraus gebildeten Aussagen immer dann in der in der modernen Prädikatenlogik üblichen Weise notiert werden, wenn die sich hierdurch ergebende erhöhte Übersichtlichkeit die Untersuchungen wesentlich erleichtert.

Nach Standardauffassung werden die Wahrheitsbedingungen aller Aussagen in der folgenden, *kompositionalen* Weise angegeben. Zunächst wird für jedes Wort angegeben, in welcher Weise es zu den Wahrheitsbedingungen der durch das Wort gebildeten Aussagen beiträgt. Die Wahrheitsbedingungen von Aussagen lassen sich dann aus den Angaben der Wahrheitsbedingungsbeiträge derjenigen Worte ableiten, aus denen die Aussage gebildet ist. Wird der Wahrheitsbedingungsbeitrag eines Wortes als dessen Bedeutung aufgefasst, so kann man also sagen, dass der Sinn einer Aussage im Rahmen der wahrheitskonditionalen Semantik als Funktion aus den Bedeutungen der die Aussage bildenden Worte sowie der Art ihrer Kombination in der Aussagen dargestellt wird.

Eine ausführliche Untersuchung der Voraussetzungen der Standardkonzeption erschiene zwar lohnenswert, würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Stattdessen sollen in diesem Kapitel anhand einer Untersuchung der Standardformulierungen der Wahrheitsbedingungen empirischer Aussagen lediglich diejenigen Aspekte der Standardkonzeption diskutiert werden, welche sich später auch für die Formulierung der Wahrheitsbedingungen arithmetischer Aussagen als relevant herausstellen werden. Hierfür soll zunächst noch in diesem Abschnitt die Standardkonzeption von Wortbedeutungen *operational* interpretiert und verschiedene Arten von Worterklärungen diskutiert werden. In den folgenden drei Abschnitten sollen dann die Standarderklärungen von Namen und Prädikaten sowie die hierauf basierenden Angaben der Wahrheitsbedingungen elementarer empirischer Aussagen untersucht und bewertet werden.

Wie in Abschnitt 1.1 erläutert, bestimmen Wahrheitsbedingungen insofern Verifikationsregeln, als das Ermitteln des Wahrheitswertes einer Aussage darin besteht, festzustellen, ob die Wahrheitsbedingungen der Aussage erfüllt sind. Der Wahrheitsbedingungsbeitrag eines Wortes zu den Aussagen, welche durch das Wort gebildet sind, besteht demnach im Beitrag des Wortes zu den Verifikationsregeln der fraglichen Aussagen.

Während Aussagen vollständige Verifikationsregeln bestimmen, bestimmen Worte somit also spezifische *Verifikationsschritte*. Den Wahrheitsbedingungsbeitrag eines Wortes zu kennen und damit dessen Bedeutung verstehen, ist daher gleichbedeutend damit, den durch das Wort bestimmten Verifikationsschritt zu kennen. Und diese Kenntnis manifestiert sich darin, Aussagen zu verifizieren, welche durch das Wort gebildet sind.

Dieser Zusammenhang zwischen Wahrheitsbedingungsbeiträgen und Verifikationsschritten kann zunächst am Beispiel von Wahrheitsfunktionen erläutert werden. Aussagen, welche durch die Anwendung einer Wahrheitsfunktion auf andere Aussagen gebildet sind, seien dabei im Folgenden als *wahrheitsfunktional* bezeichnet. Der Wahrheitswert einer wahrheitsfunktionalen Aussage ‚$T(p_1,...,p_n)$' hängt in einer spezifischen, durch die Wahrheitsfunktion ‚T' bestimmten Weise von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen ‚p_1', ... , ‚p_n' ab. In der Bestimmung von Abhängigkeiten dieser Art bestehen daher die Wahrheitsbedingungsbeiträge von Wahrheitsfunktionen. Prinzipiell stellt sich die Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage demnach als eine spezifische Kombination aus der Verifikation ihrer Argumente sowie eines *rechnerischen* Übergangs von den dabei ermittelten Wahrheitswerten zum Wahrheitswert der wahrheitsfunktionalen Aussage dar. Dabei besteht der Beitrag der Wahrheitsfunktion zur Verifikationsregel der wahrheitsfunktionalen Aussagen darin, die Regel für den fraglichen Rechenschritt zu bestimmen, also die Regel, gemäß derer der Wahrheitswert der wahrheitsfunktionalen Aussagen aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen zu berechnen ist. Eine Form einer solchen Kombination aus Argumentverifikationen und Wahrheitswertberechnungen bestünde darin, dass zuerst die Wahrheitswerte aller Argumente ‚p_1', ... , ‚p_n' ermitteln werden, um dann hieraus den Wahrheitswert von ‚$T(p_1,...,p_n)$' zu errechnen. Dieses Verfahren sei im Folgenden als das *kanonische* Verifikationsverfahren wahrheitsfunktionaler Aussagen bezeichnet. Eine weiteres Verfahren, welches im Folgenden als die *sukzessive Verifikationsmethode* wahrheitsfunktionaler Aussagen bezeichnet werden soll, stellt sich wie folgt dar: die Argumente der wahrheitsfunktionalen Aussage werden der Reihe nach ermittelt, wobei nach jeder dieser Verifikationen jeweils all diejenigen Wahrheitswerte berechnet werden, welche die wahrheitsfunktionale Aussage unter den bis zu diesem Punkt noch in Frage kommenden Wahrheitswertverteilungen hätte. Dieses Verfahren wird genau an dem Punkt abgebrochen, an dem alle diese Wahrheitswerte identisch sind.

Es seien an dieser Stelle noch zwei weitere technische Termini eingeführt, die sich vor allem im nächsten Kapitel dieser Arbeit noch als nützlich erweisen werden. Hiernach heiße eine Wahrheitswertverteilung auf die Argumente einer entsprechenden wahrheitsfunktionalen Aussage eine *Wahrheitsmöglichkeit* der wahrheitsfunktionalen Aussage. Und ferner sei eine Wahrheitsmöglichkeit genau dann als *Wahrheitsgrund* der wahrheitsfunktionalen Aussage bezeichnet, wenn diese wahr ist, falls die Wahrheitswerte ihrer Argumente entsprechend der Wahrheitsmöglichkeit verteilt sind.[11] Durch den Gebrauch dieser Terminologie kann der Unterschied zwischen dem kanonischen und dem sukzessiven Verfahren auch wie folgt ausgedrückt werden. Die kanonische Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage besteht darin, dass zunächst durch die Wahrheitswerte aller ihrer Argumente ermittelt werden, um daraufhin festzustellen, ob die durch diese Wahrheitswerte bestimmte Wahrheitsmöglichkeit ein Wahrheitsgrund ist. Dagegen werden bei der sukzessiven Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage durch die sukzessive Ermittlung von Wahrheitswerten ihrer Argumente die Wahrheitsmöglichkeiten solange eingrenzt, bis hierbei entweder nur noch Wahrheitsgründe oder nur noch Wahrheitsmöglichkeiten, die keine Wahrheitsgründe sind, übrig bleiben.

Den Wahrheitsbedingungsbeitrag eines Wortes *angeben* – und damit dessen Bedeutung *erklären* –, heißt also, den Verifikationsschritt anzugeben, der durch das Wort bestimmt wird. Und das wiederum bedeutet, anzugeben, wie Aussagen, welche durch das Wort gebildet sind, verifiziert – und also erzeugt bzw. entschieden – werden. Es können nun grob zwei verschiedene Arten dafür unterschieden werden, wie Handlungsregeln im Allgemeinen und die Regeln für das Verifizieren, Erzeugen und Entscheiden von Aussagen im Besonderen angegeben werden können. Eine Möglichkeit hierfür besteht in *verbalen* Erklärungen, in denen die fraglichen Handlungsregeln durch Gebrauch bestimmten Ausdrücke angegeben werden. Zu Verbalerklärungen in diesem Sinn zählen insbesondere die sogenannten *analytischen* Definitionen eines Ausdrucks, dem Definiendum, durch einen anderen Ausdruck, das Definiens. In dieser Weise erklärt etwa die folgenden Bestimmung die die Disjunktion ‚$\vee$' analytisch durch Bezug auf die Konjunktion ‚$\wedge$' und die Negation ‚$\neg$':

‚$p_1 \vee p_2$' bedeutet: $\neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$

Indem sie dem Definiendium den Wahrheitsbedingungsbeitrag und damit den Verifikationsschritt des Definiens zuordnet, stellt eine analytische Definition eine *Ersetzungsregel* dar. Denn die Verifikation einer durch das Definiendum gebildeten Aussage besteht hiernach darin, anstelle dieser Aussage diejenige Aussage zu verifizieren, welche aus der Ersetzung des Definiendums durch das Definiens resultiert.

Eine zweite Möglichkeit für die Erklärung einer Handlungsregel besteht nun darin, dem Adressaten der Erklärung die Befolgung der Regel vorzuführen. Diese im Folgenden als *praktisch*

[11] Die hier eingeführten Redeweisen orientieren sich an Wittgensteins Definitionen in LPA 5.101, auch wenn dort der Ausdruck ‚Wahrheitsbedingung' anders als in der hier vorliegenden Arbeit verwendet wird.

bezeichneten Erklärungen nehmen typischerweise die Form eines Unterrichts (oder Trainings) an, in dem der Schüler angehalten wird, das ihm vorgeführte Verhalten nachzumachen, und in diesen Nachahmungen gegebenenfalls korrigiert wird (vgl. PU, §208). In diesem Sinn kann also der durch die Wahrheitsfunktion ‚∨' bestimmte Verifikationsschritt in der Weise praktisch erklärt werden, dass das Erzeugen und Entscheiden von Aussagen, welche durch ‚∨' gebildet sind, anhand verschiedener Beispiele vorgeführt wird. Hierbei wäre also zu zeigen, dass eine Aussage der Form ‚$p_1 \vee p_2$' jeweils in Folge der Feststellung der Wahrheit einer der beiden Teilaussagen ‚p_1' bzw. ‚p_2' geäußert werden kann, und dass die Äußerung einer Aussage der Form ‚$p_1 \vee p_2$' genau dann zu bejahen ist, wenn zumindest die Äußerung einer der beiden Teilaussagen ‚p_1' bzw. ‚p_2' zu bejahen wäre (vgl. Tugendhat 1976, S. 306 ff.).

Praktische Erklärungen sind insofern *grundlegender* als Verbalerklärungen, als sie im Prinzip auch an jemanden gerichtet werden können, der noch keine Sprache versteht. Dagegen setzt etwa eine analytische Definition sowohl voraus, dass der Adressat das Definiens versteht, als auch, dass er den allgemeinen Mechanismus analytischer Definitionen kennt. Neben dem Definiens muss ihm also auch bekannt sein, dass die Formulierung einer analytischen Definition der Ausdruck einer entsprechenden Ersetzungsregel ist. Auch der Mechanismus der analytischen Definition kann allerdings anhand von Beispielen praktisch erklärt werden, indem jeweils auf eine Formulierung einer entsprechenden analytischen Definition – also etwa auf einen Ausdruck der Form: ‚α' bedeutet: β – verwiesen wird, wenn ein Ausdruck durch einen Anderen ersetzt wird.

Auf der Grundlage der Unterscheidung zwischen verbalen und praktischen Erklärungen kann nun die bislang zurückgestellte Frage danach, inwiefern sich im Erklären eines Ausdruck dessen Verstehen manifestiert, dahingehend beantwortet werden, dass einen Ausdruck zu verstehen gleichbedeutend damit ist, ihn *praktisch* erklären zu können. Denn da das praktische Erklären eines Ausdrucks darin besteht, dessen Verwendung vorzuführen, ist die Fähigkeit, einen Ausdruck in dieser Weise zu erklären sowohl notwendig als auch hinreichend dafür, den fraglichen Ausdruck zu verstehen. Dagegen ist zu bemerken, dass die Fähigkeit, die Verwendung eines Ausdrucks verbal zu erklären, zumindest im Fall einfacher Ausdrücke keine notwendige Bedingung dafür ist, den Ausdruck zu verstehen. Und sie ist keinesfalls eine hinreichende Bedingung, da es natürlich möglich ist, dass jemand zwar eine solche Verbalerklärung *zitieren* und dennoch den derart erklärten Ausdruck nicht verwenden kann.

Da es sich bei analytischen Definitionen um bloße Ersetzungsregeln handelt, deren Befolgung – wie soeben erläutert – stets nur einen Teilschritt in der Verifikation entsprechender Aussagen bildet, kann nicht *jedes* Wort analytisch definiert werden. Denn ohne die Ergänzung weiterer Erklärungen würden analytische Definitionen bestenfalls bestimmen, in welcher Weise Aussagen wechselseitig ineinander umgeformt werden können, nicht jedoch, wie irgendeine

Aussage tatsächlich verifiziert wird. Wie bereits angedeutet, ergibt sich hieraus zwar deshalb kein grundsätzliches Problem, da Ausdrücke nicht nur verbal, sondern auch praktisch erklärt werden können. Allerdings ist die verbale Form der Erklärung natürlich dann unvermeidbar, wenn – wie etwa im Rahmen dieser Arbeit arbeitet beabsichtigt – die gesuchten Worterklärungen und die aus ihnen abzuleitenden Wahrheitsbedingungsangaben entsprechender Aussagen schriftlich festgehalten werden sollen. Im Rahmen der Standardkonzeption werden daher die Wahrheitsbedingungsbeiträge derjenigen Ausdrücke, die nicht analytisch durch andere Ausdrücke erklärt werden, durch bestimmte *metasprachliche* Sätze angegeben. In dieser Weise wird etwa der Wahrheitsbedingungsbeitrag der Disjunktion verschiedentlich wie folgt angegeben:

(D) ‚p_1 oder p_2' ist wahr $\Leftrightarrow$ ‚p_1' ist wahr, oder ‚p_2' ist wahr.

Formulierungen dieser Art rufen bei denen, die sie zum ersten Mal und ohne weitere Erläuterungen hören, mitunter eine nicht ganz unberechtigte Skepsis hervor. Denn so wie etwa die obige Erklärung der Disjunktion sind viele der metasprachlichen Erklärungen der Standardkonzeption in dem Sinn *zirkulär*, dass in diesen Erklärungen Ausdrücke verwendet werden, deren Verwendung eigentlich erst durch diese Erklärungen erklärt werden soll. Die offenbare Zirkularität der Erklärung der Disjunktion könnte zwar zunächst dadurch vermieden werden, dass die Wahrheitsbedingungen disjunktiver Aussagen in der Form der folgenden Fallunterscheidung angegeben werden:

Wenn ‚p_1' wahr ist und ‚p_2' wahr ist, dann ist ‚p_1 oder p_2' wahr.
Wenn ‚p_1' wahr ist und ‚p_2' falsch ist, dann ist ‚p_1 oder p_2' wahr.
Wenn ‚p_1' falsch ist und ‚p_2' wahr ist, dann ist ‚p_1 oder p_2' wahr.
Wenn ‚p_1' falsch ist und ‚p_2' falsch ist, dann ist ‚p_1 oder p_2' falsch.

Doch immer dann, wenn die zu erklärende Objektsprache Teil der erklärenden Metasprache ist, können Zirkularitäten der geschilderten Art nicht gänzlich vermieden werden.

Dennoch sind solche zirkulären metasprachlichen Erklärungen deshalb nicht unbrauchbar, weil durch sie die Verwendungsweise der zu erklärenden Ausdrücke beschrieben werden kann. So *erinnert* z.B. (D) denjenigen, der die Teilausdrücke dieser Erklärung und damit insbesondere den hierdurch zu erklärenden Ausdruck ‚oder' bereits versteht, daran, wie Aussagen, die durch ‚oder' gebildet sind, verifiziert werden. Anders als im Fall einer (zirkelfreien) analytischen Definition, ist es natürlich zwecklos, diese Verbalerklärung an jemanden zu richten, der die Verwendung des Ausdrucks ‚oder' nicht schon beherrscht. Dennoch kann durch (D) zumindest *mittelbar* auch das Verstehen desjenigen hergestellt werden, der ‚oder' noch nicht versteht, indem ihm die durch (D) beschrieben Verwendung dieses Ausdrucks vorgeführt wird. Jemand, der den Ausdruck ‚oder' bereits versteht, könnte (D) also als eine *Anleitung* dafür benutzen, diesen Ausdruck jemandem, der ihn noch nicht versteht, praktisch zu erklären. Verbalerklärungen dieser Art sollen im Folgenden als *deskriptive Erklärungen* bezeichnet werden.

Abschließend können somit die drei wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts wie folgt formuliert werden. Erstens können *Worterklärungen* zweier grundlegender Arten jeweils als Angaben der *Wahrheitsbedingungsbeiträge* der durch sie erklärten Worte aufgefasst werden; nämlich zum einen die analytische Definition und zum anderen die praktischen Erklärungen, zu denen, wie im nächsten Abschnitt noch zu erläutern sein wird, insbesondere die hinweisenden Erklärungen zählen. Zweitens können auch praktische Erklärungen verbal kodifiziert werden. Dass in einer solchen deskriptiven Erklärungen eventuell der zu erklärende Ausdrücke selbst oder andere, durch diesen Ausdruck erst zu erklärenden Ausdrücke gebraucht werden müssen, ist solange unproblematisch, wie die verbale Erklärung in akkurater Weise darstellt, wie das zu erklärende Wort praktisch erklärt werden kann. Und drittens folgt daraus, dass die Adäquatheitsbedingung von Wahrheitsbedingungsangaben in deren Verifikationsakkuratheit besteht, dass eine Worterklärung, um adäquat zu sein, den durch das Wort bestimmten Verifikationsschritt akkurat wiedergegeben muss.

1.5 Die Erklärung der Verwendung von Namen und Prädikaten ist im Rahmen der Standardkonzeption durch zwei Prinzipien geleitet. Gemäß des ersten dieser beiden Prinzipien sind Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten die elementarsten durch Namen bzw. Prädikate gebildeten Aussagen. Hiernach müsste sich also die Kenntnis der Wahrheitsbedingungsbeiträge von Namen und Prädikaten – und damit das Verstehen dieser Ausdrücke – in der Verwendung von Aussagen dieser Art manifestieren. Gemäß des zweiten Prinzips ist die Verwendung von Namen durch die Rede von der Bezugnahme auf Gegenstände und die Verwendung von Prädikaten durch die Rede vom Zutreffen auf Gegenstände zu charakterisieren. Hiernach besteht also der Wahrheitsbedingungsbeitrag eines *Prädikats* in den Bedingungen, die ein beliebiger Gegenstand erfüllen muss, damit das Prädikat auf ihn *zutrifft*. Und der Wahrheitsbedingungsbedingungsbeitrag eines *Namens* besteht in einer Regel, die bestimmt, auf welchen Gegenstand der Name sich *bezieht*.

Für den hier zunächst betrachteten Fall materieller bzw. raumzeitlicher Gegenstände kann diese Auffassung der Wahrheitsbedingungsbeiträge von Prädikaten und Namen in der folgenden Weise *operational* charakterisiert werden: Sowohl im Fall eines Prädikats als auch im Fall eines Namens besteht der Verifikationsschritt, der durch die Angaben der entsprechenden

Wahrheitsbedingungsbeiträge kodifiziert werden soll, darin, festzustellen, ob der jeweilige Name bzw. das jeweilige Prädikat sich auf einen *gegebenen* Gegenstand bezieht bzw. auf diesen zutrifft. Hierbei ist die Rede vom *Gegeben-Sein* im einem *räumlichen* Sinn zu verstehen. D.h., dass ein Gegenstand einem Sprecher genau dann im fraglichen Sinn gegeben ist, wenn Sprecher und Gegenstand in einer *Lagebeziehung* zueinander stehen, die es Ersterem erlaubt Letzteren *wahrzunehmen*.

Dass diese operationale Charakterisierung der Wahrheitsbedingungsbeiträge von Prädikaten und Namen nicht nur intuitiv plausibel ist, sondern auch durch Bezug auf die Verifikationsregeln von Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten gerechtfertigt werden kann, soll im nächsten Abschnitt noch gezeigt werden. Bereits an dieser Stelle ist allerdings zu bemerken, dass sich sowohl durch das Feststellen, ob ein Prädikat auf einen gegebenen Gegenstand zutrifft, als auch durch das Feststellen, ob sich ein Name auf einen gegebenen Gegenstand bezieht, jeweils zwei primitive Sprachspiele konstruieren lassen, die im Folgenden beide als das *Anwenden* von Prädikaten und Namen bezeichnet werden sollen. Das erste dieser Sprachspiele wird dabei in der Weise praktiziert, dass das Prädikat bzw. der Name während des Zeigens auf einen Gegenstand ausgesprochen wird, auf den das Prädikat zutrifft bzw. der Name sich bezieht. Dagegen wird das zweite Sprachspiel in der Weise praktiziert, dass das Prädikat bzw. der Name zunächst während des Zeigens auf einen beliebigen Gegenstand ausgesprochen wird. Diese Äußerung wird dann in einem zweiten Schritt in der aus dem Entscheidungsspiel bekannten Weise bewertet, indem also in dem Fall, dass das Prädikat auf den Gegenstand zutrifft bzw. der Namen sich auf ihn bezieht, der Ausdruck ‚Ja' und anderenfalls der Ausdruck ‚Nein' geäußert wird. Im Gegensatz etwa zu den Wahrheitsfunktionen lässt sich die Verwendung von Namen und Prädikaten in dieser Weise von der Verwendung der im Rahmen der Standardkonzeption betrachteten Aussagen isolieren (vgl. Tugendhat 1976, S. 207 ff.).

Der Sinn, den die Rede vom Bezug eines Namens und vom Zutreffen eines Prädikats im Rahmen der Standardkonzeption hat, kann nun durch Rückgriff auf die soeben eingeführte Rede vom Anwenden eines Ausdrucks definiert werden. In einem ersten Schritt können hierbei zunächst beide der zu definierenden Redeweisen durch die folgenden Bestimmungen in einheitlicher Weise auf die Rede vom Anwenden zurückgeführt werden:

„‚F" trifft auf x zu' bedeutet: ‚F' ist auf x anwendbar.

„‚a" bezieht sich auf x' bedeutet: ‚a' ist auf x anwendbar.

Wie bereits erwähnt, wird im Rahmen der Standardkonzeption zwar oftmals nicht erläutert, worin der Unterschied zwischen dem Begriff des Zutreffens und dem des Bezugs und damit der

Unterschied in der Verwendungsweise von Namen und Prädikaten besteht. Dieser Punkt ist unter anderem deshalb problematisch, weil eine semantische Unterscheidung zwischen Namen und Prädikaten natürlich durch Bezug auf deren Verwendungsweisen zu definieren wäre. Einen Anhaltspunkt für eine solche Erläuterung ergibt sich jedoch aus dem Umstand, dass der Gebrauch des *bestimmten Artikels* im Zusammenhang mit der Rede vom Bezug zwingend ist. Anders als im Fall der Rede von Zutreffen eines Prädikats, impliziert die Rede vom Bezug eines Namens also, dass die Gegenstände, auf welche Namen anwendbar sind, jeweils *eindeutig* bestimmt sind. Hierbei ist die fragliche Eindeutigkeit sowohl *synchron* als auch *diachron* zu verstehen. Es ist also nicht nur so, dass es zu jedem Zeitpunkt höchstens einen Gegenstand gibt, auf den ein bestimmter Name anwendbar ist. Darüber hinaus ist ein Name nur dann zu zwei verschiedenen Zeitpunkten anwendbar, wenn der zum einen Zeitpunkt gegebene Gegenstand identisch mit dem zum anderen Zeitpunkt gegebenen Gegenstand ist. Auch ohne die Unterscheidung zwischen Namen und Prädikaten bereits vorauszusetzen, können nun durch Bezug auf Eindeutigkeitsregeln dieser Art diejenigen Ausdrücke, die auf Gegenstände Bezug nehmen von denjenigen Ausdrücken unterschieden werden, die auf Gegenstände zutreffen. Sei hierfür ‚α' ein Ausdruck, dessen grundlegende Verwendung im Anwenden auf Gegenstände besteht, so kann der Begriff des Bezug nehmenden Ausdrucks wie folgt definiert werden:

> „‚α" hat Bezugsfunktion' bedeutet: Dass ‚α' auf x und auf y anwendbar ist, ist äquivalent dazu, dass ‚α' auf x anwendbar und x raumzeitlich identisch mit y ist.

Wie zuvor bereits angedeutet, kann das Anwenden eines Prädikats oder eines Namens als das *Behaupten* einer Ein-Wort Aussage aufgefasst werden (vgl. Tugendhat 1976, S. 210; Quine 1992, S. 2-6). Denn ist ‚α' eine Name oder ein Prädikat, so kann zum einen das Praktizieren des ersten der beiden Anwendungsspiele – also das Aussprechen von ‚α' während des Zeigens auf einen Gegenstand, auf den ‚α' anwendbar ist – als das *Erzeugen* einer Ein-Wort Aussage aufgefasst werden. Und analog hierzu kann zum anderen das Praktizieren des zweiten Anwendungsspiels als das *Entscheiden* einer Ein-Wort Aussage aufgefasst werden. In der Umgangssprache werden solche im Folgenden als *demonstrative Aussagen* bezeichneten Aussagen typischerweise durch das Voranstellen eines Präfixes wie etwa ‚Dies ist' (oder ‚Dies ist ein') formuliert. In jedem Fall ist das Anwenden eines Namens oder Prädikats ‚α' in derselben Weise reguliert wie das Behaupten einer entsprechenden demonstrativen Aussage ‚Dies ist α'. D.h.: die Anwendbarkeitsbedingungen von ‚α' sind die Wahrheitsbedingungen der entsprechenden demonstrativen Aussage ‚Dies ist α'. Aus diesem Grund könnten die Redeweisen vom Zutreffen und vom Bezug auch in der folgenden

Weise durch Rückgriff auf die Rede von der Wahrheit entsprechender demonstrativer Aussagen definiert werden:

> „„F" trifft auf x zu' bedeutet: Beim Zeigen auf x ist ‚Dies ist F' wahr.
>
> „„a" bezieht sich auf x' bedeutet: Beim Zeigen auf x ist ‚Dies ist a' wahr.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen sind die beiden zuvor genannten Prinzipen der Standardkonzeption für die Verwendung von Prädikaten und Namen wie folgt zu bewerten. Zunächst kann dem zweiten Prinzip zwar zugestimmt werden, dem zu Folge die Wahrheitsbedingungsbeiträge von Prädikaten und Namen in Bedingungen für das Zutreffen bzw. den Bezug dieser Ausdrücke auf Gegenstände bestehen. Dieses Prinzip ist allerdings dahingehend zu erläutern, dass Bedingungen beider Arten Bedingungen für die Anwendbarkeit der fraglichen Ausdrücke bzw. für die Wahrheit entsprechender demonstrativer Aussagen sind. Das zweite Prinzip ist dagegen abzulehnen. Denn es sind die im Rahmen der Standardkonzeption typischerweise nicht berücksichtigten demonstrativen Aussagen – und nicht die Existenzaussagen, Prädikationen oder Identitäten –, welche insofern grundlegend für die Verwendung von Prädikaten und Namen sind, als sich in der Verwendung dieser Aussagen die Kenntnis der Wahrheitsbedingungsbeiträge von Prädikaten und Namen – und damit das Verstehen dieser Ausdrücke – unmittelbar manifestiert.

Da die grundlegende Verwendung von Prädikaten und Namen im Anwenden dieser Ausdrücke auf *gegebene* Gegenstände besteht, nehmen praktische Erklärungen von Prädikaten und Namen die Form *hinweisender Erklärungen* an. Hierbei wird der also zunächst der Lehrer das fragliche Wort ‚α' dadurch hinweisend erklären, dass er während des Zeigens auf einen geeigneten Gegenstand entweder ‚α' oder eine entsprechende Definitionsformulierung – wie ‚Dies heißt „α"' oder dergleichen – ausspricht. Der Schüler wird dann angehalten, die ihm hierdurch vorgeführte Anwendung von ‚α' dadurch *fortzusetzen*, dass auch er nun bei anderen Gelegenheiten ‚α' während des Zeigens auf einen Gegenstand ausspricht.

Wie zuvor erläutert, sind im Fall eines Namens zwei verschiedenen Anwendungsgelegenheiten in der Weise miteinander verknüpft, dass ein kontinuierlicher Raumzeitpfad von dem bei der einen Gelegenheit gegebenen Gegenstand zu dem bei der anderen Gelegenheit gegebenen Gegenstand führt. In der praktischen Erklärung eines Namens muss der Schüler daher nach der hinweisenden Erklärung des Namens dazu angehalten werden, den Namen dann und nur dann auf einen ihm gegebenen Gegenstand anzuwenden, wenn dieser Gegenstand durch einen Raumzeitpfad mit dem Gegenstand verbunden ist, auf den in der hinweisenden Erklärung gezeigt wurde. Raumzeitpfade dieser Art werden von denjenigen

Prädikate bestimmt, die, wenn sie auf einen bestimmten Gegenstand zutreffen, nach dessen Teilung in einen oder mehrere Teile auf höchstens einen dieser Teile weiterhin zutreffen. Zu Prädikaten dieser Art, die in der Fachliteratur als *Sortale* bezeichnet werden, zählen also etwa Ausdrücke wie ‚Mensch', ‚Hund' oder ‚Tisch' (vgl. Tugendhat 1976, S. 453 ff.). Ist ‚S' ein solches Sortal, dann kann der Mechanismus der hinweisenden Erklärung eines Namens also wie folgt dargestellt werden:

> (HD,N) Angenommen, zum Zeitpunkt t_a wird am Ort s_a auf ein S zeigend ‚Dieses S heißt „a"' geäußert. In diesem Fall ist ‚a' auf ein zu einem späteren Zeitpunkt t gegebenes S genau dann anwendbar, wenn dieses S *raumzeitlich identisch* mit dem S ist, das sich zum Zeitpunkt t_a bei s_a befand.

Offenbar können raumzeitliche Gegenstände nicht permanent verfolgt werden. Aus diesem Grund wird im Normalfall in der Weise festgestellt, ob ‚a' auf ein zum Zeitpunkt t gegebenes S anwendbar ist, das dieses S daraufhin untersucht wird, ob es ein Merkmal aufweist, welches nur dasjenige S aufweist, das sich zum Zeitpunkt t_a bei s_a befand. Merkmale dieser Art werden auch als *Identitätskriterien* bezeichnet. Im Fall von Menschen können sich Kriterien etwa auf deren Erscheinung oder deren Erinnerungen beziehen; auf höherer Ebene auch auf Fingerabdrücke oder DNA. Doch auch wenn die Anwendung von Namen im Normalfall auf die Überprüfung solcher Identitätskriterien angewiesen ist, so ist dennoch zu beachten, dass diese Kriterien im folgenden Sinn sekundär gegenüber der grundlegenden Bedingung der raumzeitlichen Kontinuität sind. Erstens: Sollte ein gegebenes S zwar einerseits die Kontinuitätsbedingung erfüllen – und also durch einen Raumzeitpfad mit dem bei (s_a,t_a) gegebenen S verbunden sein –, jedoch andererseits einem bestimmten Identitätskriterium nicht genügen, so gilt ‚a' dennoch als anwendbar. Grundsätzlich behält etwa ein Mensch seinen Namen auch im Fall eines Gedächtnisverluste oder einer drastischen Veränderung seiner Erscheinung; der Name überträgt sich in einem solchen Fall also nicht etwa auf denjenigen, der dem früheren Selbst des ursprünglichen Namensträgers am ähnlichsten sieht, oder mit diesem die meisten Erinnerungen teilt. Zweitens: eine Bedingung dafür, ein Merkmal zu einem Identitätskriterium zu erheben, besteht darin, dass sich beobachten lässt, dass das Merkmal im Allgemeinen konstant bleibt, wenn man Gegenstände der fraglichen Art auf ihrem Weg durch den Raum begleitet. Ein Merkmal kann also nur dann als Identitätskriterium verwendet werden, wenn sich ein Konflikt der im ersten Punkt geschilderten Art nicht – oder zumindest nicht häufig – beobachten lässt. Würde sich etwa die Erscheinung von Menschen permanent und unsystematisch verändern, könnte sie nicht als Identitätskriterium verwendet werden.

Die späteren Anwendungsgelegenheiten von *Prädikaten* sind nicht in *derselben* Weise auf die entsprechenden Definitionssituationen bezogen wie die von Namen. So ist es z.B. für die Anwendbarkeit eines Farb- oder eines Längenprädikats auf einen gegebenen Gegenstand weder notwendig, noch hinreichend, dass dieser identisch mit dem Gegenstand ist, auf den bei der hinweisenden Definition des fraglichen Prädikats gezeigt wurde. Stattdessen ist ein solches Prädikat dann und dann anwendbar, wenn der gegebene Gegenstand in der Relation der Farb- bzw. der Längengleichheit zu dem in der Definitionssituation gegebenen Gegenstand steht. Dementsprechend muss der Schüler im Fall eines Farbprädikats nach dessen hinweisender Definition dazu angehalten werden, das Prädikat auf genau diejenigen Gegenstände anzuwenden, welche zum Anwendungszeitpunkt die Farbe haben, welche der Gegenstand, auf den bei der hinweisenden Definition gezeigt wurde, zum Definitionszeitpunkt hatte. Der Mechanismus der hinweisenden Definition eines Farbprädikats kann somit wie folgt dargestellt werden:

> (HD,P) Angenommen, zum Zeitpunkt t_F wird am Ort s_F ‚Diese Farbe heißt „F"' während des Zeigens auf einen Gegenstand y geäußert. In diesem Fall ist ‚F' auf ein zu einem späteren Zeitpunkt t gegebenes x genau dann anwendbar, wenn x zum Zeitpunkt t dieselbe Farbe wie y zum Zeitpunkt t_F hat.

Diese Darstellung muss allerdings modifiziert werden, falls das Farbprädikat in der Weise auf Gegenstände angewendet wird, dass diese hierfür ihrer Farbe nach mit einem dem Prädikat zugeordneten *Muster* – etwa einem bestimmten Farbtäfelchen – verglichen werden. In diesem Fall wird in der hinweisenden Definition die Zuordnung zwischen Prädikat und Muster hergestellt, indem der Lehrer das Farbprädikat bzw. einen entsprechenden Definitionsausdruck während des Zeigens auf das fragliche Farbtäfelchen ausspricht. Der Schüler wird daraufhin dazu angehalten, das Farbtäfelchen neben ihm gegebene Gegenstände zu halten und das Farbprädikat daraufhin jeweils genau dann auszusprechen, wenn diese sich hierbei als farbgleich zum Farbtäfelchen erweisen. Anders als im zuvor diskutierten Fall der musterlosen Verwendung von Farbprädikaten, besteht in diesem Fall die Bedingung dafür, dass das Farbprädikat auf einen gegebenen Gegenstand zutrifft, nicht in der *diachronen*, sondern in der *synchronen* Farbgleichheit zu dem Gegenstand, auf den bei der hinweisenden Definition gezeigt wurde. In diesem Fall ist der Mechanismus der hinweisenden Definition also wie folgt zu beschreiben:

(HD,P,M) Angenommen, zum Zeitpunkt t_F wird am Ort s_F ‚Diese Farbe heißt „F"' während des Zeigens auf ein Farbtäfelchen geäußert. In diesem Fall ist ‚F' auf ein zu einem späteren Zeitpunkt t gegebenes x genau dann anwendbar, wenn x und dasjenige Farbtäfelchen, welches sich zum Zeitpunkt t_F am Ort s_F befand, zum Zeitpunkt t dieselbe Farbe haben.

Wie im Anschnitt zuvor erläutert wurde, identifiziert eine analytische Definition den Wahrheitsbedingungsbeitrag des Definiendums mit dem des Definiens. Die analytische Definition eine Namens oder eines Prädikats bestimmt demnach, dass der Namen bzw. das Prädikat genau dann auf einen gegebenen Gegenstand anwendbar ist, wenn das entsprechende Definiens es ist. Im Folgenden soll ein knapper Überblick über einige Möglichkeiten solcher analytischer Definitionen gegeben werden. Hierbei sie von den eher uninteressanten Definitionen von Namen durch Namen und von Prädikaten durch andere atomare Prädikate abgesehen.

Namen können durch solche *Kennzeichnungen* analytisch definiert werden, die im zuvor geschilderten Sinn bezugnehmend verwendet werden; d.h. also durch Kennzeichnungen, die nur dann bei zwei verschiedenen Gelegenheiten anwendbar sind, wenn die bei diesen Gelegenheiten gegebenen Gegenstände raumzeitlich identisch sind. Zwar genügen einfache Präsenskennzeichnungen der Form ‚dasjenige S, das F ist' dieser Bedingung deshalb nicht, weil sie zwar zu jedem Zeitpunkt auf höchstens einen Gegenstand anwendbar sind, jedoch zu verschiedenen Zeitpunkten auf verschiedene Gegenstände anwendbar sein können. Bezugnehmend im geforderten Sinn sind jedoch diejenigen Kennzeichnungen, die einen expliziten Bezug auf Zeitpunkte oder Raumzeitstellen enthalten; also Kennzeichnungen der Form ‚dasjenige S, welches zum Zeitpunkt t_0 F war' oder der Form ‚dasjenige S, das sich zum Zeitpunkt t_0 am Ort s_0 befand'. Unter der Voraussetzung, dass die Verwendung von Kennzeichnungen sowie die Verwendung von Ausdrücken für Orte und Zeitpunkte bereits bekannt ist, kann somit insbesondere die Anwendungsregel eines Namens ‚a', der zunächst durch das Zeigen auf ein S bei (s_a,t_a) hinweisend definiert wurde, durch die folgende analytische Definition nachträglich verbal kodifiziert werden:

‚a' bezeichnet: das S, das sich zum Zeitpunkt t_a am Ort s_a befand.[12]

Ein atomares Prädikat kann nicht nur durch ein andere atomares Prädikat, sondern auch durch ein *komplexes* Prädikat definiert werden. Definitionen dieser Art seien hier durch Bezug auf zwei

[12] In diesem Zusammenhang wird aus dem Grund der Ausdruck ‚bezeichnen' anstelle des Ausdrucks ‚bedeuten' gebraucht, weil die Rede von Bedeutung eines Namens ungebräuchlich ist bzw. auf die in diesem Zusammenhang irrelevante etymologische Bedeutung des Namens verweist.

Beispielklassen komplexer Prädikate illustriert. Zum einen können komplexe Prädikate aus atomaren Prädikaten durch die Kombination mit *Wahrheitsfunktionen* gebildet werden. In diesem Sinn kann also etwa durch die Konjunktion der beiden atomaren Prädikate ‚Pferd' und ‚weiß' das komplexe Prädikat ‚Pferd und weiß' gebildet werden, welches umgangssprachlich durch den Ausdruck ‚weißes Pferd' notiert wird. Durch dieses komplexe Prädikat kann dann das atomare Prädikat ‚Schimmel' wie folgt analytisch definiert werden:

‚Schimmel' bedeutet: weißes Pferd

Eine zweite Möglichkeit zur Bildung komplexer (einstelliger) Prädikate besteht darin, mehrstellige Prädikate mit einer geeigneten Anzahl von Namen zu kombinieren. Insbesondere lassen sich Farb- oder Längenprädikate durch diejenigen komplexen Prädikate analytisch definieren, welche aus der Kombination des zweistelligen Prädikats ‚farbgleich mit' bzw. ‚gleichlang wie' mit einen entsprechenden Paradigmennamen resultieren. Wenn also etwa zunächst das zweistellige Prädikat ‚farbgleich' erklärt und das Rottäfelchen als solches benannt wird, dann kann das entsprechende Farbprädikat ‚rot' in der folgenden Weise analytisch definiert werden:

‚rot' bedeutet: farbgleich mit dem Rottäfelchen.

Und analog hierzu kann das Längenprädikat ‚1 Meter lang' analytisch durch das komplexe Prädikat ‚gleichlang wie das Urmeter' definiert werden.

Da sich Prädikate nur durch Bezug auf andere Prädikate analytisch definieren lassen, können nicht alle Prädikate analytisch definiert werden.[13] Im Rahmen der Standardkonzeption werden diejenigen Prädikate, die als undefinierbar vorausgesetzt werden müssen, üblicherweise durch metasprachliche *Trivialerklärungen* der folgenden Form erklärt:

‚F' trifft auf x zu ⇔ x ist F

Da Erklärungen dieser Art offenbar zirkulär sind, können sie nur als deskriptive Erklärungen aufgefasst werden, also als Erklärungen, welche die Verwendung von ‚F' all denen vor Augen führt, die diese Verwendung bereits beherrscht. Für ein elementares Prädikat, dessen Anwendung nicht durch Paradigmenvergleiche reguliert ist, erscheinen Erklärungen dieser Art insofern zulässig, als sich die Anwendung eines solchen Prädikats und damit des praktische Erklärung

[13] Es sei an dieser Stelle von den in Abschnitt 4.4 noch näher zu diskutieren Pseudo-Prädikaten abgesehen, welche nur aus Namen, Wahrheitsfunktionen und dem Identitätszeichen gebildet sind.

eventuell nicht weiter beschreiben lässt. Falls etwa das Farbprädikat ‚rot' auf entsprechende Gegenstände unmittelbar – also ohne einen Farbvergleich mit einem entsprechenden Rotmuster – angewendet wird, könnte man eine solche metasprachliche Trivialerklärung bestenfalls noch durch den Hinweis darauf ergänzen, dass es sich bei ‚rot' um ein Farbprädikat handelt; also um ein Prädikat, dessen Anwendbarkeit invariant unter der Beziehung der Farbgleichheit ist. Sollte ‚rot' dagegen auf der Grundlage von Farbvergleichen mit einem entsprechenden Farbtäfelchen angewendet werden, so muss dieses Muster in einer Beschreibung der Anwendungsregel von ‚rot', deren Befolgung in einer entsprechenden praktischen Erklärung vorzuführen wäre, angegeben werden. Anstelle der einfachen Trivialerklärung der Art ‚„rot" trifft genau dann auf x zu, wenn x rot ist' müsste in diesem Fall also eine Erklärung der folgenden Art benutzt werden:

> ‚rot' trifft auf x zu ⇔ x ist farbgleich mit dem Farbtäfelchen, das sich bei (s_{rot},t_{rot}) befand.

Auch Namen werden im Rahmen der Standardkonzeption üblicherweise durch Trivialerklärungen erklärt. Dabei nehmen Erklärungen dieser Art zumeist die folgende Form an:

> ‚a' bezieht sich auf a

Angaben dieser Art können, wie es scheint, auch auf die folgende Form gebracht werden:

> ‚a' bezieht sich auf x ⇔ x ist identisch mit a

Diese Formulierung ist unter anderem aus zwei Gründen vorzuziehen. Zum einen geht aus einer solchen Formulierung deutlicher als aus der üblichen Formulierung hervor, dass auch ein Name, der sich auf *keinen* Gegenstand bezieht, einen Beitrag zu den Wahrheitsbedingung derjenigen Aussagen leistet, die durch den Namen gebildet sind. Und zum anderen lassen sich, wie im nächsten Abschnitt noch zu zeigen sein wird, durch Bezug auf Formulierungen dieser Art die im Rahmen der Standardkonzeption nicht berücksichtigten *singulären Existenzaussagen* der Form ‚a existiert' in analoger Weise wie die auf Prädikate bezogenen Existenzaussagen der Form ‚Es gibt ein F' erklären.

Auch die Trivialerklärungen von Namen sind in beiden Formulierungsweisen zirkulär, insofern diese Formulierungen nur derjenige versteht, der auch den zu erklärenden Namen bereits versteht. Wie bereits mehrfach erläutert, ist diese Form der Zirkularität zwar nicht notwendigerweise fatal, da Erklärungen dieser Art auch deskriptiv aufgefasst werden können. Es ist allerdings zu bemerken, dass der Rückgriff auf zirkuläre metasprachliche Erklärungen dieser Art im Fall von Namen insofern vermeidbar ist, als zumindest im Prinzip *alle* Namen einer Sprache analytisch definiert können. Denn anders als im Fall von Prädikaten können Namen, wie zuvor erläutert, nicht nur durch anderen Namen, sondern auch durch Kennzeichnungen analytisch definiert werden. Wenn die Verwendung bestimmter Prädikate sowie die Verwendung von Ausdrücken für Zeitpunkte und Orte als bekannt vorausgesetzt werden kann, können also sämtliche Namen einer Sprache analytisch definiert werden, so dass also kein Namen als undefinierbar vorausgesetzt werden müsste.

Natürlich ist hierzu zu bemerken, dass normalerweise zumindest die Verwendung einiger Namen bereits vor der Verwendung von Ausdrücken für Zeitpunkt und Orte erlernt wird. Gestaltet sich die Lernreihenfolge in dieser Weise, so können die Anwendbarkeitsbedingungen der zuerst erlernten Namen also nicht durch analytische Definitionen der fraglichen Art kommuniziert werden. Diese Schwierigkeit entfällt allerdings für deskriptive Verbalerklärungen, da diese nicht an den Schüler gerichtet werden sollen, sondern lediglich die Funktion haben, die praktischen Erklärungen anzuleiten, durch welche das Verstehen des Schülers hergestellt werden kann. Wenn also, wie im Rahmen der Standardkonzeption der Fall, ohnehin nicht auf analytische, sondern auf deskriptive Erklärungen abgezielt wird, dann bieten sich also auch Erklärungen von Namen an, welche deren Bezugsgegenstände nicht durch die Namen selbst, sondern in der folgenden Weise durch raumzeitliche Kennzeichnungen dieser Gegenstände spezifizieren:

‚a‘ bezieht sich auf x $\Leftrightarrow$ x ist identisch mit dem S, das sich bei (s_a,t_a) befand.

Metasprachliche Erklärungen dieser Art sind den üblichen Trivialerklärungen von Namen insbesondere aus dem Grund vorzuziehen, dass die ihr Verständnis nicht bereits die Kenntnis der Anwendungsbedingungen von ‚a‘ voraussetzt. Dann eine Erklärung, welche in dieser Weise Raumzeitkoordinaten des Bezugsgegenstands von ‚a‘ angibt, liefert auch demjenigen eine Anleitung dafür, die Verwendung von ‚a‘ praktisch zu erklären, der mit der Rede von Raumzeitkoordinaten zwar vertraut ist, jedoch noch nicht weiß, worauf ‚a‘ sich bezieht.

Abschließend kann somit das folgende Fazit hinsichtlich der Behandlung von Namen und Prädikaten für raumzeitliche Gegenstände im Rahmen der Standardkonzeption gezogen werden. Trotz der zuvor diskutierten Schwierigkeiten können die üblichen Trivialerklärungen von Prädikaten und Namen als zulässige deskriptive Erklärungen – d.h. also als Anleitungen für entsprechende praktische Erklärungen – betrachtet werden. Die eigentliche Schwierigkeit der Standardkonzeption betrifft nicht diese Erklärungen, sondern vielmehr den Umstand, dass die allgemeine Art der Verwendung von Prädikaten und Namen nicht hinreichend dargestellt wird. Denn hiermit wird auch der Sinn der für die Standardkonzeption grundlegenden Begriffe des Bezugs und des Zutreffens im Unklaren gelassen. Wie zuvor erläutert wurde, scheint man sagen zu können, dass die grundlegende Verwendung von Namen und Prädikaten für raumzeitliche Gegenstände im Anwenden dieser Ausdrücke auf gegebene Gegenstände bzw. im Behaupten von demonstrativen Aussagen besteht, welche durch die Namen bzw. Prädikate gebildet sind.[14] Die Angaben von Bezugsregeln und Zutreffensbedingungen sind in diesem Fall also als Kodifikationen der Anwendungsregeln der fraglichen Ausdrücke bzw. der Verifikationsregeln entsprechender demonstrativer Aussagen zu verstehen. Und die praktischen Erklärungen, zu denen die üblichen metasprachlichen Trivialerklärungen Anleitungen liefern, sind aus diesem Grund hinweisende Erklärungen. Wie später – in Kapitel 8 – zu erläutern sein wird, scheint sich die im Rahmen der Standardkonzeption übliche Annahme, dass sich auch die Verwendung des arithmetischen Vokabulars durch die Angabe von Bezugsregeln für Ziffern und Zutreffensbedingungen für arithmetische Operationszeichen erklären ließe, darauf zurückführen zu lassen, dass der Sinn, den die Rede vom Bezug und Zutreffen im Zusammenhang mit Namen und Prädikaten für raumzeitliche Gegenstände hat, unbestimmt gelassen wird. Denn sobald man die Rede vom Bezug und von Zutreffen dadurch präzisiert, dass man sie in der zuvor geschilderten Weise mit dem Anwenden von Ausdrücken auf gegebene Gegenstände in Verbindung bringt, erscheint die Idee, dass man im selben Sinn auch vom Bezug oder Zutreffen arithmetischer Zeichen sprechen könne, alles andere als naheliegend.

1.6 Anders als die in diesem Abschnitt zu untersuchenden Existenzaussagen, Prädikationen und Identität sind die im Abschnitt zuvor diskutierten demonstrativen Aussagen in dem Sinn *situationsimmanent*, dass der Wahrheitswert einer solchen Aussage *nur* davon abhängt, welche Gegenstände in der entsprechenden Äußerungssituation gegeben sind, und wie diese zum Äußerungszeitpunkt sind beschaffen. Durch die Behauptung einer demonstrativen Aussage wird also stets nur die jeweilige Äußerungssituation dargestellt. Dies gilt im Übrigen auch für Aussagen, welche aus den zuvor diskutieren einfachen demonstrativen Aussagen der Form ‚Dies ist a' bzw. ‚Dies ist F' durch die Anwendung von Wahrheitsfunktionen resultieren. Denn da etwa eine Aussage der Form ‚Dies ist a, und es ist F' beim Zeigen auf einen gegebenen Gegenstand x genau dann wahr ist, wenn auch die beiden einfachen demonstrativen Aussagen ‚Dies ist a' und

[14] Dass diese Verwendung die Grundlegende bedeutet nicht, dass Namen oder Prädikate am häufigsten in Aussagen dieser Form verwendet werden, sondern dass sich in dieser Verwendung das Verstehen und Missverstehen dieser Ausdrücke manifestiert.

‚Dies ist F' beim Zeigen auf x wahr sind, hängt also auch der Wahrheitswert von ‚Dies ist a, und es ist F' nur davon ab, welcher Gegenstand in der entsprechenden Äußerungssituation gegeben ist, und wie dieser zum Äußerungszeitpunkt beschaffen ist. Die einfachen demonstrativen Aussagen und die hieraus durch die Anwendung von Wahrheitsfunktionen gebildeten komplexen Aussagen bilden also eine Art *Situationssprache*, mittels derer ein Sprecher stets nur seine jeweilige Äußerungssituation beschreiben kann.

Um zu verstehen, wie der Schritt von den situationsimmanenten Aussagen der Situationssprache zu den *situationstranszendenten* Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten vollzogen werden kann, soll nun zuerst geklärt werden, auf welche Verwendungsmerkmale von Namen, Prädikaten und Wahrheitsfunktionen die Situationsimmanenz der aus diesen Ausdrücken gebildeten Aussagen der Situationssprache zurückzuführen ist. Hierfür ist zunächst zu bemerken, dass der Wahrheitswert einer demonstrativen Aussage sowohl vom Zeitpunkt als auch vom Ort ihrer Äußerung abhängig ist. Der Umstand, dass die Wahrheitswerte von Aussagen in diesem Sinn raumzeitstellenrelativ sein können, wurde bei der Charakterisierung von Wahrheitsfunktionen im Abschnitt zuvor noch nicht berücksichtigt. Soll dies geschehen, so muss die von der Standardkonzeption übernommene Charakterisierung der Wahrheitsbedingungsbeiträge von Wahrheitsfunktionen, der zu Folge der Wahrheitswert einer wahrheitsfunktionalen Aussage funktional abhängig ist von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen, in der folgenden Weise präzisiert werden: der Wahrheitswert einer wahrheitsfunktionalen Aussage an einer bestimmten Raumzeitstelle ist funktional abhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen an *derselben* Raumzeitstelle. Aus diesem Grund müsste also etwa die zuvor gegebene Erklärung der Disjunktion (D) in der folgenden Weise modifiziert werden. Sei s ein Ort und t ein Zeitpunkt, dann gilt:

(D') ‚p_1 oder p_2' ist wahr bei (s,t) $\Leftrightarrow$ ‚p_1' ist wahr bei (s,t), oder ‚p_2' ist wahr bei (s,t).

Handelt es sich bei allen Teilaussagen einer wahrheitsfunktionalen Aussage um demonstrative Aussagen, so hängen somit nicht nur deren Wahrheitswerte, sondern auch der Wahrheitswert der wahrheitsfunktionalen Aussage nur von der jeweiligen Äußerungssituation ab. Dass die Anwendung von Wahrheitsfunktionen auf situationsimmanente Aussagen wieder zu situationsimmanenten Aussagen führt, kann also darauf zurückgeführt werden, dass die Wahrheitswerte wahrheitsfunktionaler Aussagen von den (raumzeitlich) simultanen Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen abhängen.

Wie aus dieser Überlegung deutlich wird, kann die Bildung situationstranszendenter Aussagen jedoch durch die Einführung von Ausdrücken ermöglicht werden, deren Anwendung auf Namen bzw. Prädikate zu Aussagen führen, deren Wahrheitswerte an einer bestimmten Raumzeitstelle von den Wahrheitswerten der den Namen und Prädikaten entsprechenden demonstrativen Aussagen an *anderen* Raumzeitstellen abhängt. Dass es sich beim Existenzquantor ‚Es gibt' um einen solchen Ausdruck handelt soll im Folgenden durch eine ausführliche Darstellung der Verwendung von Existenzaussagen gezeigt werden. Die Verwendungsweisen der beiden anderen für die Standardkonzeption grundlegenden Aussagearten – also die Prädikationen und Identitäten – sollen dann im nächsten Abschnitt nur in knapper Weise dargestellt werden.

Da diejenigen Ausdrücke, deren Kombination mit Namen oder Prädikaten zu situationstranszendenten Aussagen führt, nicht auf Wahrheitsfunktionen zurückführbar sind, sondern eine eigene Ausdrucksklasse bilden, können nicht alle Ausdrücke dieser Art analytisch definiert werden. Einige grundlegende Ausdrücke dieser Art müssen praktisch bzw. deskriptiv erklärt werden. Im Folgenden sei angenommen, dass der *Existenzquantor* in diesem Sinn grundlegend ist. Ebenso wie im Rahmen der Standardkonzeption soll daher auch hier keine analytische Definition von ‚Es gibt', sondern nur eine deskriptive Erklärung gegebenen werden. Hierfür soll zunächst die grundlegende Verwendung – also das Erzeugen und das Entscheiden – von Existenzaussagen dargestellt werden, welche in praktischen Erklärungen des Existenzquantors vorzuführen ist. Im Anschluss daran soll aus diesen Darstellungen die gesuchte deskriptive Erklärung des Existenzquantors abgeleitet werden. Durch Bezug auf diese Erklärung sollen dann die im Rahmen der Standardkonzeption üblichen Erklärungen des Existenzquantors bewerte werden.

Es sei nun zunächst noch einmal daran erinnert, dass die Erzeugung einer demonstrativen Aussage ‚Dies ist ein F' in der Weise reguliert ist, dass ‚Dies ist ein F' genau dann geäußert werden kann, wenn gleichzeitig auf einen Gegenstand gezeigt wird, der F ist. Aus diesem Grund ist die Äußerungskorrektheit – und also die Wahrheit – von ‚Dies ist ein F' nicht nur relativ zum Zeitpunkt, sondern auch zum Ort der Äußerung. Wenn sich also der Sprecher von einem Ort, an dem ein F präsent und dementsprechend die Äußerung von ‚Dies ist ein F' korrekt ist, zu einem anderem Ort begibt, an dem kein F mehr präsent ist, dann kann ‚Dies ist ein F' nicht mehr geäußert werden. Es erscheint nun akkurat, die Erzeugungsregel einer Existenzaussage im Gegensatz hierzu durch die folgende Bestimmung darzustellen: ‚Es gibt ein F' kann sowohl in der Gegenwart eines F als auch (unmittelbar) nach dem Verlassen eines Ortes, an dem ein F gegenwärtig ist, geäußert werden. Ein Existenzaussage der Form ‚Es gibt ein F' kann also nicht nur an den Orten erzeugt werden, an denen auch die entsprechende demonstrative Aussage ‚Dies ist ein F' erzeugt werden kann. Vielmehr kann ‚Es gibt ein F' ebenfalls erzeugt werden, nachdem sich der Sprecher von einem Ort, an dem ‚Dies ist ein F' erzeugt werden kann, zu einem anderen Ort begeben hat, an dem ‚Dies ist ein F' eventuell nicht erzeugt werden kann. Bei einer entsprechenden praktischen Erklärung der Erzeugung von Existenzaussagen kann vorausgesetzt werden, dass der Schüler die Erzeugung demonstrativer Aussagen bereits beherrscht. Dem Schüler ist also bereits klar, dass nach dem Verlassen eines Ortes, an dem ‚Dies ist ein F' zu äußern korrekt ist, nicht ohne weiteres ‚Dies ist ein F' wiederholt, sondern eventuell nur ‚¬ Dies ist ein F' geäußert werden kann. Was ihm nun beigebracht werden muss, ist also, dass in einem solchen Fall stattdessen eine andere durch ‚F' gebildete Aussage, nämlich die Aussage ‚Es gibt ein F', geäußert werden kann. Es muss also gezeigt werden, dass der Übergang von ‚Dies ist ein F' zu ‚Es gibt ein F' auch nach einem Ortswechsel stets möglich bleibt. Zu diesem Zweck könnte man das folgende Verhalten vorführen: Zunächst wird in der Gegenwart eines F ‚Dies ist ein F' geäußert. Dann wird der Äußerungsort zugunsten eines anderen Ortes verlassen, an dem kein F gegenwärtig ist. Und an diesem Ort wird dann ‚Es gibt ein F' und – um den Kontrast von ‚Dies ist' und ‚Es gibt' zu betonen – eventuell auch ‚¬ Dies ist ein F' geäußert.

Die *Entscheidung* einer demonstrativen Aussage ‚Dies ist ein F' ist derart reguliert, dass eine Äußerung von ‚Dies ist ein F' unmittelbar – also ohne Wechsel von Ort oder Zeitpunkt – in Abhängigkeit von der Präsenz eines F zu bewerten ist: ist bei der Äußerung ein F präsent, so ist die Äußerung zu bejahen; ist kein F präsent, so ist die Äußerung zu verneinen. Dagegen kann die Entscheidungsregel für ‚Es gibt ein F' wie folgt dargestellt werden: ist ein F bei der Äußerung von ‚Es gibt ein F' präsent, so ist die Äußerung ebenfalls unmittelbar zu bejahen. Ist dagegen kein F präsent, so wird die Äußerung von ‚Es gibt ein F' nicht unmittelbar bewertet. Vielmehr wird mit dem Aufsuchen anderer Orte begonnen, um festzustellen, ob an diesen Orten ein F präsent ist. Sobald ein solcher Ort gefunden wird, bricht die Suche mit der Bejahung der ursprünglichen Äußerung von ‚Es gibt ein F' ab. Sollte sich kein Ort finden lassen, an dem ein F präsent ist, so wird die Äußerung verneint. Die Äußerung der Existenzaussage ‚Es gibt ein F' ist also nicht nur dann zu bejahen, wenn auch eine Äußerung der entsprechenden Situationsaussage ‚Dies ist ein F' zu bejahen wäre, sondern auch dann, wenn sich ein anderer Ort finden lässt, an dem eine Äußerung von ‚Dies ist ein F' zu bejahen wäre. Eine praktische Erklärung der Entscheidung von Existenzaussagen muss also vermitteln, dass ‚Es gibt ein F' – im Gegensatz zu ‚Dies ist ein F' – nicht bereits durch die momentane Abwesenheit von Fs entschieden ist, sondern dass, wann immer nicht unmittelbar auf ein F gezeigt werden kann, die Bewertung einer Äußerung von ‚Es gibt ein F' eine Suche nach Orten, an denen ein F präsent ist und damit ein Verlassen des Äußerungsortes erfordert. Um diesen Unterschied zwischen ‚Es gibt' und ‚Dies ist' hervorzuheben, bietet sich also das Vorführen des folgenden Verhaltens an: Zunächst wird sowohl ‚Dies ist ein F' als auch ‚Es gibt ein F' an einer Raumzeitstelle geäußert, an der kein F gegenwärtig ist. Während nun ‚Dies ist ein F' unmittelbar verneint wird, wird die Bewertung von ‚Es gibt ein F' zunächst zurückgehalten, um zuvor den Ort zu wechseln. Sobald hierbei ein F angetroffen wird, wird die Äußerung von ‚Es gibt ein F' bejaht; sollte kein F angetroffen werden, wird die fragliche Äußerung verneint.

Aus den Darstellungen der Erzeugungs- und der Entscheidungsregel von Existenzaussagen kann nun zunächst deren Verifikationsregel extrahiert werden. Diese Verifikationsregel soll nun wieder im Kontrast zur Verifikationsregel von demonstrativen Aussagen dargestellt werden. Hierbei ist zunächst festzuhalten, dass die Wahrnehmung eines Gegenstands, auf den ‚F' zutrifft, für die Feststellung, ob ‚Es gibt ein F' wahr ist, ebenso relevant ist wie für die Feststellung, ob ‚Dies ist ein F' wahr ist. Während jedoch im Fall von ‚Dies ist ein F' nur die Raumzeitstelle der jeweiligen Äußerung zu beobachten ist, müssen im Fall von ‚Es gibt ein F' eventuell auch andere Orte zum selben Zeitpunkt der Äußerung beobachtet werden. Im Gegensatz zur Verifikation einer demonstrativen Aussage erfolgt also die Verifikation einer Existenzaussage im Allgemeinen nicht durch die Wahrnehmung eines Orts, sondern durch die Wahrnehmung verschiedener Orte, an welche sich der Wahrnehmende hierfür also begeben muss.

Zwei Bemerkungen scheinen in diesem Zusammenhang angebracht. Erstens wird für die praktische Erklärung der Verifikation von Existenzaussagen zunächst eine Begrenzung des Verifikationsgebiets erforderlich sein, welche bei der Erklärung unausdrücklich unterstellt werden kann. Worauf es bei der Vermittlung des Verständnisses von ‚Es gibt' in erster Linie ankommt, ist nicht, das Bewusstsein der prinzipiellen Unbegrenztheit des Raumes herzustellen, sondern über die Raumzeitstelle der Äußerung hinauszugehen und damit den Kontrast zu ‚Dies ist' hervorzuheben. Das Bewusstsein der Unbegrenztheit des Raumes kann dann später durch sukzessives Ausweiten des Verifikationsgebiets erzeugt werden. Zweitens kann zunächst auch der Umstand vernachlässigt werden, dass während des für die Verifikation einer Existenzaussage eventuell erforderlichen Ortswechsels stets Zeit verstreicht, innerhalb welcher sich die an den verschiedenen Orten wahrgenommenen Gegenstände verändern können. Um die sich aus dieser Komplikation ergebenden Schwierigkeiten in praktischen Erklärungen zunächst zu vermeiden, bietet es sich an, die Suchzeit zunächst dadurch minimal zu halten, dass das Verifikationsgebiet entsprechend drastisch beschränkt wird.

Wird von diesen beiden Komplikationen – also von der Beschränkung des Verifikationsgebiets sowie der Dauer entsprechender Suchvorgänge – abgesehen, so kann der Wahrheitsbedingungsbeitrag von ‚Es gibt' also durch die folgende deskriptive Erklärung angegeben werden:

(E) ‚Es gibt ein F' ist wahr bei t $\Leftrightarrow$ Es gibt bei t einen Ort s derart, dass gilt:
‚Dies ist ein F' wahr bei (s,t) ist.

Dass hierbei auf der linken Seite des Bikonditionals (E) nicht mehr der Ort, sondern nur noch der Zeitpunkt spezifiziert wird, an dem ‚Es gibt ein F' wahr bzw. falsch ist, ist deshalb möglich, weil die durch die rechte Seite von (E) formulierte Bedingung bestimmt, dass der Wahrheitswert von ‚Es gibt ein F' nur zeit-, nicht jedoch ortabhängig ist.

Es sei in diesem Zusammenhang ferner bemerkt, dass, wie im Abschnitt zuvor bereits angekündigt, auch die durch Namen gebildeten singulären Existenzaussagen in analoger Weise wie die durch Prädikate gebildeten Existenzaussagen erklärt werden können. Denn ist ‚a' ein Name, so können die Wahrheitsbedingungen von ‚a existiert' wie folgt angegeben werden:

(SE) ‚a existiert' ist wahr bei t ⇔ Bei t gibt es einen Ort s derart, dass gilt:
‚Dies ist a' wahr bei (s,t) ist.

Falls ‚a' bei (s_a,t_a) durch Zeigen auf ein S hinweisend definiert wurde, so ist ‚a existiert' nach (SE) also genau dann wahr zum Zeitpunkt t, wenn es bei t irgendwo ein S gibt, das raumzeitlich identisch mit dem S ist, das sich bei (s_a,t_a) befand.

Im Rahmen der Standardkonzeption werden zwei Erklärungen des Existenzquantors vorgeschlagen: eine *materiale* und eine *substitutionale* Erklärung. An dieser Stelle sei zunächst die materiale Erklärung diskutiert; auf die substitutionale Erklärung wird im nächsten Abschnitt – im Anschluss an die Diskussion von Prädikationen und Identitäten – zurückzukommen sein. Die materiale Erklärung des Existenzquantors, welche aufgrund ihrer Popularität als dessen Standarderklärungen gelten kann, lautet nun wie folgt:

(EM) ‚Es gibt ein F' ist wahr ⇔ Es gibt einen Gegenstand, auf den ‚F' zutrifft.

Dass diese Erklärung in *dem* Fall, dass ‚F' ein Prädikat für raumzeitliche Gegenstände ist, in etwa der zuvor entwickelten Erklärung (E) entspricht, soll nun dadurch gezeigt werden, dass (EM) in drei Schritten in (E) überführt wird. Hierbei ist zuerst zu bemerken, dass, wie schon im Fall von Wahrheitsfunktionen, auch bei der Standarderklärung des Existenzquantors die Zeitrelativität der Wahrheitswerte von Aussagen, die durch den Existenzquantor gebildet sind, außer Acht gelassen wird. Es kann jedoch angenommen werden, dass auch in diesem Fall der Zusammenhang zwischen der Wahrheit der Existenzaussage und dem Zutreffen des entsprechenden Prädikats als *simultan* konzipiert werden soll, so dass also (EM) in einem ersten Schritt wie folgt umformuliert werden kann:

(EM_1) ‚Es gibt ein F' ist wahr *bei t* ⇔ *Bei t* gibt es einen Gegenstand, auf den ‚F' *bei t* zutrifft.

Nun ist die Existenz eines (materiellen) Gegenstands gleichbedeutend mit seiner Präsenz an einem bestimmten Ort. Dass es zum Zeitpunkt t einen Gegenstand gibt, auf den ‚F' zutrifft, ist folglich gleichbedeutend damit, dass es einen Ort gibt, an dem sich zum Zeitpunkt t ein Gegenstand befindet, auf den ‚F' zutrifft. Aus diesem Grund kann (EM_1) also seinerseits folgendermaßen umformuliert werden:

(EM_2) ‚Es gibt ein F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt bei t einen *Ort s* derart, dass gilt:
Zum Zeitpunkt t befindet sich *bei s* ein Gegenstand, auf den ‚F' bei t zutrifft.

Wie im Abschnitt zuvor erläutert, ist das Zutreffen eines Prädikats ‚F' auf einen Gegenstand gleichbedeutend mit der Wahrheit der entsprechenden demonstrativen Aussage ‚Dies ist ein F' an dem Ort, an welchem sich der fragliche Gegenstand befindet. Aus diesem Grund kann also (EM_2) zu (E) umgeformt werden.

Diese Überlegungen legen es nahe, die im Rahmen der Standardkonzeption favorisierte Erklärung des Existenzquantors (E) in der folgenden Weise zu bewerten. Es ist zwar grundsätzlich möglich, die Wahrheitsbedingungen empirischer Existenzaussagen durch den Gebrauch der Rede vom Zutreffen von Prädikaten – anstelle der in der Standardkonzeption nicht verfügbaren Rede von der Wahrheit demonstrativer Aussagen – anzugeben. Aber streng genommen kann erst die Formulierung (EM_2) als verifikationsakkurat gelten. Die im Rahmen der Standardkonzeption übliche Formulierung (EM) ist dagegen nur bedingt adäquat, insofern sie sich in der zuvor geschilderten Weise in die verifikationsakkurate Formulierung (EM_2) überführen lässt. Dabei lassen sich die Unzulänglichkeiten von (EM) durch die Annahmen identifizieren, welche die fraglichen Überführungsschritte von (E;) zu (EM_2) vermitteln. So macht der Übergang von (EM) zu (EM_1) zunächst die Simultanität zwischen der Wahrheit von ‚Es gibt ein F' und dem Zutreffen von ‚F' explizit. Der Übergang von (EM_1) zu (EM_2) verdeutlicht dann den für den Unterschied in der Verifikation von ‚Dies ist ein F' und ‚Es gibt ein F' entscheidenden Punkt, dass für die Feststellung, ob ‚Es gibt ein F' an einer bestimmten Raumzeitstelle wahr ist, gegebenenfalls der Ort zu wechseln ist.

1.7 Die Wahrheitsbedingungen von Prädikationen und Identitäten über raumzeitliche Gegenstände werden im Rahmen der Standardkonzeption durch Gebrauch der Rede vom Bezug von Namen und vom Zutreffen von Prädikaten angeben. Hierbei werden die

Wahrheitsbedingungen von Prädikationen üblicherweise durch Formulierungen der folgenden Art angeben:

(PS) ‚a ist F' ist wahr ⇔ ‚F' trifft auf den Gegenstand zu, auf den ‚a' sich bezieht.

Wie schon im Fall der Standarderklärung des Existenzquantors (EM), ist es auch für eine verifikationsakkurate Angabe der Wahrheitsbedingungen von Prädikationen erforderlich, die entsprechende Standarderklärung (PS) in der Weise umzuformulieren, dass der hierbei unterstellte Bezug auf Raumzeitstellen explizit gemacht wird. Wie in Abschnitt 1.4 bei der Explikation der Begriffe des Bezug und des Zutreffens durch die Rede vom Anwenden eines Ausdrucks erläutert wurde, ist ein Name jederzeit nur auf ein und denselben Gegenstand anwendbar. Dagegen kann ein Prädikat sowohl zum selben Zeitpunkt, als auch zu verschiedenen Zeitpunkten auf verschiedene Gegenstände anwendbar sein. Nun ist eine Prädikation ‚a ist F' zu einem bestimmten Zeitpunkt genau dann behauptbar, wenn das Prädikat ‚F' zu *diesem* Zeitpunkt auf den Gegenstand anwendbar ist, auf den der Name ‚a' jederzeit anwendbar ist. Aus diesem Grund müsste (PS) also zunächst in der folgenden Weise auf Zeitpunkte relativiert werden:

(PS_1) ‚a ist F' ist wahr *bei t* ⇔ *Bei t* trifft ‚F' auf den Gegenstand zu, auf den ‚a' sich *jederzeit* bezieht.

Sowohl in (PS) als auch in (PS_1) wird die Existenz des Bezugsgegenstands von ‚a' implizit vorausgesetzt. Wie im Abschnitt zuvor erläutert wurde, besteht die Existenz eines raumzeitlichen Gegenstands in dessen Präsenz an einem beliebigen Ort. Um diesen räumlichen Aspekt zu berücksichtigen, ist (PS_1) also ferner in der folgenden Weise zu modifizieren:

(PS_2) ‚a ist F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt bei t einen *Ort s* derart, dass gilt:
Zum Zeitpunkt t befindet sich bei s ein Gegenstand, auf den ‚a' sich bezieht, und auf den ‚F' bei t zutrifft.

Wie in Abschnitt 1.3 erläutert wurde, ist die Anwendbarkeit von ‚a' und ‚F' auf einen Gegenstand x äquivalent dazu, dass die demonstrative Aussage ‚Dies ist a, und es ist F' beim Zeigen auf x wahr ist. Genau wie im Fall von Existenzaussagen können daher auch die in (PS_2) durch den Gebrauch der Rede vom Bezug von Namen und vom Zutreffen von Prädikaten formulierten Wahrheitsbedingungen von Prädikationen alternativ auch durch den Gebrauch der Rede von der

Wahrheit demonstrativer Aussagen angegeben werden. Genauer ist (PS_2) also äquivalent zu der folgenden Wahrheitsbedingungsangabe:

(P) ‚a ist F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt bei t ein s derart, dass gilt:
‚Dies ist a, und es ist F' ist wahr bei (s,t)

Die Befolgung der durch (P) bzw. (PS_2) kodifizierten Verifikationsregel einer Prädikation ‚a ist F' besteht also darin, nach einem Gegenstand zu suchen, auf den zum Äußerungszeitpunkt sowohl ‚a' als auch ‚F' anwendbar ist. Dabei gilt ‚a ist F' genau dann als wahr, wenn ein solcher Gegenstand ausfindig gemacht werden kann.

Die Wahrheitsbedingungen von Identitäten, die durch zwei Namen für raumzeitliche Gegenstände gebildet sind, werden im Rahmen der Standardkonzeption in der folgenden Weise angegeben:

(IS) ‚a ist identisch mit b' ist wahr ⇔‚a' bezieht sich auf denselben Gegenstand wie ‚b'.

Wenn, wie weiterhin angenommen werden soll, nur verifikationsakkurate Wahrheitsbedingungen als adäquat gelten können, dann muss auch (IS) dadurch präzisiert werden, dass der hierbei unterstellte Bezug auf Raumzeitstellen explizit gemacht wird. Da sich die hierfür erforderlichen Modifikationsschritte in ähnlicher Weise darstellen wie im Fall der Prädikationen, seien an dieser Stelle lediglich die beiden aus diesen Modifikationen resultierenden, verifikationsakkuraten Wahrheitsbedingungsangaben angegeben:

(IS') ‚a ist identisch mit b ' ist wahr bei t ⇔ Es gibt bei t ein s derart, dass gilt:
Bei (s,t) befindet sich ein Gegenstand, auf den sich sowohl ‚a' als auch ‚b' bezieht.

(I) ‚a ist identisch mit b ' ist wahr bei t ⇔ Es gibt bei t ein s derart, dass gilt:
‚Dies ist a, und es ist b' ist wahr bei (s,t).

Vor einem abschließenden Fazit zu den Wahrheitsbedingungsangaben der im Rahmen der Standardkonzeption als grundlegend aufgefassten Aussagearten, soll nun noch kurz auf die sogenannte Substitutionserklärung des Existenzquantors eingegangen werden. Diese Erklärung kann durch die Beobachtung motiviert werden, dass nach (E) und (P) eine Prädikation über raumzeitliche Gegenstände jeweils die durch das entsprechende Prädikat gebildete Existenzaussage impliziert. Dementsprechend gilt also:

Wann immer ‚a ist F' wahr ist, ist auch ‚Es gibt ein F' wahr.[15]

Die Idee liegt also nahe, Existenzaussagen in der folgenden Weise durch Bezug auf Prädikationen zu erklären:

(ES) ‚Es gibt ein F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt ein ‚a' derart, dass gilt:
‚a ist F' ist wahr bei t.

Die Wahrheit einer durch ein Prädikat ‚F' gebildeten Existenzaussagen wäre hiernach also äquivalent mit der Existenz eines Namens, dessen Kombination mit ‚F' in einer wahren Prädikation resultiert.

Wie in Abschnitt 5.6 noch näher zu erläutern sein wird, kann der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Verwendungsweisen des Existenzquantors in verschiedenen Kontexten – wie etwa empirischen oder arithmetischen Kontexten – zwar in der von der Substitutionserklärung anvisierten Weise dargestellt werden. D.h., die Wahrheit einer aus dem Existenzquantor sowie einem bestimmten Ergänzungsausdruck gebildeten Aussage kann immer als äquivalent zu der Existenz einer wahren Aussage aus einer durch den Ergänzungsausdruck bestimmten Klassen von Aussagen aufgefasst werden. Die Schwierigkeit von (ES) ergibt sich jedoch aus der Annahme, dass die fragliche Klasse von Aussagen in dem Fall, dass der Existenzquantor durch ein Prädikat für raumzeitliche Gegenstände ergänzt wird, aus den durch das Prädikat gebildeten Prädikationen besteht. Denn natürlich ist der Standardeinwand gegen (ES) völlig berechtigt, dem zu Folge die Existenz einer wahren durch ‚F' gebildeten Prädikation zumindest dann keine notwendige Bedingung für die Wahrheit von ‚Es gibt ein F' ist, wenn nicht allen für das Zutreffen von ‚F' prinzipiell in Frage kommenden Gegenständen Namen gegeben werden.

Allerdings gibt es, wenn ein geeignetes System von Ortsnamen vorausgesetzt wird, keine namenlosen Orte. Angenommen nun, die im Folgenden als *Präsenzaussagen* bezeichneten Aussagen der Form ‚Bei s befindet sich ein F' seien durch die folgende Bestimmung definiert:

‚Bei s befindet sich ein F' ist wahr bei t ⇔ ‚Dies ist ein F' ist wahr bei (s,t).

[15] Analog hierzu kann aus (E), (ES), (P) und (I) unmittelbar abgeleitet werden, dass auch ‚a existiert' wahr ist, wann immer ‚a ist F' wahr ist, und dass sowohl ‚a existiert' als auch ‚b existiert' wahr ist, wann immer ‚a ist identisch mit b' wahr ist.

Wie Abschnitt zuvor erläutert, ist die Existenz eines raumzeitlichen Gegenstands bestimmter Art gleichbedeutend mit der Existenz eines Orts, an dem ein Gegenstand der fraglichen Art präsent ist. Unter der Voraussetzung eines vollständigen Systems von Ortsnamen ist daher die Wahrheit einer Existenzaussage über raumzeitliche Gegenstände nicht nur äquivalent zur Existenz eines Ortes, an dem eine entsprechende demonstrative Aussage wahr ist. Sie ist auch äquivalent zur Existenz eines Ortsnamens derart, dass die durch diesen sowie das fragliche Prädikat gebildete Präsenzaussagen wahr ist. In diesem Fall können Existenzaussagen durch Bezug auf Präsenzaussagen nach dem Schema der Substitutionserklärung erklärt werden:

(ES') ‚Es gibt ein F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt einen Ortsnamen ‚s' derart, dass gilt:
‚Bei s befindet sich ein F' ist wahr bei t.

Es seien nun zuletzt die Untersuchungsergebnisse der letzten beiden Abschnitte zusammengefasst. Die im Rahmen der Standardkonzeption als grundlegend betrachteten Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten sind im *räumlichen* Sinn situationstranszendent.[16] Denn im Gegensatz zu den in Abschnitt 1.4 diskutierten demonstrativen Aussagen hängen die Wahrheitswerte dieser Aussagen nicht allein von ihrer Äußerungssituation ab, sondern auch davon, welche Gegenstände zum Äußerungszeitpunkt anderenorts präsent sind, und wie diese Gegenstände zu diesem Zeitpunkt beschaffen sind. Man könnte daher sagen, dass die Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten eine *Raumsprache* bilden.

Wie in diesem und dem vorangegangen Abschnitt erläutert wurde, bietet es sich an, die Wahrheitsbedingungen dieser Raumaussagen durch Bezug auf entsprechende demonstrative Aussagen – also auf Aussagen der Situationssprache – anzugeben. So wurde in den Bestimmungen (E), (P) und (I) dargestellt, dass eine Existenzaussage, eine Prädikation oder ein Identität stets genau dann wahr ist, wenn es einen Ort gibt, an dem gleichzeitig eine entsprechende demonstrative Aussage wahr ist. Die Verifikation einer solchen Raumaussage besteht also jeweils darin, die entsprechende demonstrative Aussage nicht nur am Äußerungsort, sondern nötigenfalls auch an anderen Orten zu verifizieren. Aus den Wahrheitsbedingungsangaben (E), (P) und (I) ist daher ohne weiteres ersichtlich, dass der Schritt von der Situationssprache zur Raumsprache darin besteht, dass nun der Ortswechsel des Verifizierenden – also die räumliche Suche – Teil der Verifikation wird. Zu den Beobachtungen,

[16] Dies gilt zumindest dann, wenn, wie im Rahmen der Standardkonzeption üblich, zunächst nur die Präsensformen dieser Aussagen berücksichtigt werden.

durch welche die Situationsaussagen verifiziert werden, tritt im Fall von Raumaussagen also der Ortswechsel als weiterer konstitutiver Verifikationsschritt hinzu.

Im Rahmen der Standardkonzeption werden die Wahrheitsbedingungen der drei grundlegenden Arten vom Raumaussagen dagegen durch Bestimmungen angegeben, die darstellen, in welcher Weise der Wahrheitswert einer solchen Aussage davon abhängt, auf welche Gegenstände die in der Aussage enthaltenen Prädikate bzw. Namen anwendbar sind. Diesen Bestimmungen zu Folge werden Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten also in der Weise verifiziert, dass verschiedene, nicht notwendigerweise *gegebene* Gegenstände daraufhin untersucht werden, ob bestimmte Namen oder Prädikate auf sie anwendbar sind. Wie in diesem und dem vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde, müssen die im Rahmen der Standardkonzeption üblichen Erklärungen allerdings durch die Ergänzung systematischer Bezüge auf Raumzeitstellen präzisiert werden, um verifikationsakkurat zu sein. Erforderlich sind demnach Bestimmungen, die darstellen, in welcher Weise der Wahrheitswert einer Raumaussage zu einem bestimmten Zeitpunkt davon abhängt, auf welche der zu diesem Zeitpunkt irgendwo präsenten Gegenstände, die in der Aussage enthaltenen Namen und Prädikate zu diesem Zeitpunkt anwendbar sind. Denn erst diese Präzisierungen machen explizit, dass die Gegenstände, welche bei der Verifikation von Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten auf die Anwendbarkeit von Prädikaten und Namen hin zu untersuchen sind, in der Weise zur Gegebenheit gebracht werden, dass der Verifizierende sie ausfindig macht. Erst durch den ausdrücklichen Bezug auf Raumzeitstellen wird deutlich, dass ein konstitutiver Schritt in der Feststellung, ob ein Prädikat oder ein Name auf einen nicht gegebenen Gegenstand anwendbar ist, darin besteht, sich durch einen Ortswechsel in eine geeignete Lagebeziehung zu diesem Gegenstand zu versetzen und ihn somit also im räumlichen Sinn zu identifizieren.

Es sei nun zuletzt noch knapp dargestellt, in welcher Weise sich die räumliche Situationstranszendenz von Existenzaussagen, Prädikationen und Identitäten in deren Verwendung im Rahmen des Erzeugungs-, des Entscheidungs- und des Mitteilungsspiels niederschlägt. Das *Erzeugen* einer Raumaussage kann sich derart gestalten, dass zunächst die entsprechende demonstrative Aussage erzeugt wird, um diese daraufhin nach einem eventuellen Ortswechsel in die fragliche Raumaussage *umzuformen*. So könnte also etwa eine Existenzaussage der Form ‚Es gibt ein F' in der Weise erzeugt werden, dass zunächst während der Wahrnehmung eines F die demonstrative Aussage ‚Dies ist ein F' und dann, nach dem Verlassen der fraglichen Wahrnehmungssituation, die fragliche Existenzaussage ‚Es gibt ein F' geäußert wird. Man kann daher sagen, dass das Erzeugen von Raumaussagen darin besteht, Situationen *abzubilden*, welche nicht – oder zumindest nicht notwendigerweise – mit der Äußerungssituation identisch sind.

Beim *Entscheiden* einer Raumaussage besteht die zwischen der Äußerung der Raumaussage und deren Bewertung vermittelnde Verifikation darin, die der Raumaussage entsprechende demonstrative Aussage an anderen Orten zu verifizieren. Im Normalfall wird eine Raumaussage demnach nicht auf der Stelle, sondern erst nach dem Verlassen der Äußerungssituation entschiedenen. Wenn also etwa eine Existenzaussage ‚Es gibt ein F' an einer Raumzeitstelle geäußert wird, an der kein F gegenwärtig ist, so werden also vor der Bejahung oder Verneinung zunächst andere Orte aufgesucht, um festzustellen, ob eventuell dort ein F präsent und damit die demonstrative Aussagen ‚Dies ist ein F' wahr ist.

Wie in Abschnitt 1.2 erläutert, besteht der wesentliche Zweck des *Mitteilens* darin, dem Adressaten die Verifikation der mitgeteilten Aussage zu ersparen. Offenbar ergibt sich durch die Mittelung einer demonstrativen Aussage nur eine minimale Verifikationsersparnis, da dem Adressaten hierdurch lediglich die Beobachtung der Mitteilungssituation abgenommen wird. Eine signifikante Verifikationsersparnis ergibt sich eigentlich erst durch die Mittelungen situationstranszendenter Aussagen. So nimmt etwa die Mitteilung einer Raumaussage dem Adressaten nicht nur bestimmte Beobachtungen, sondern vor allem den für die Verifikation der Aussage typischerweise erforderlichen Ortswechsel ab. Und im Unterschied zum Beobachten gegebener Gegenstände kann ein solcher Ortswechsel natürlich mit erheblichem Aufwand verbunden sein.

1.8 Während in den drei vorangegangenen Abschnitten die im Rahmen der Standardkonzeption üblichen Wahrheitsbedingungsangaben der elementaren empirischen Aussagen jeweils nur leicht modifiziert wurden, sollen in den Kapiteln 6 und 7 dieser Arbeit die Wahrheitsbedingungen arithmetischer Aussagen in signifikant anderer Weise angegeben werden, als es im Rahmen der Standardsemantik üblich ist. Die Unterschiede in diesen Wahrheitsbedingungsangaben werden wesentlich darauf zurückzuführen zu sein, dass im Rahmen der Standardkonzeption nicht dieselben Adäquatheitsbedingungen für die Formulierung von Wahrheitsbedingungen vorausgesetzt werden wie im Rahmen dieser Arbeit. Im Folgenden soll daher zunächst untersucht werden, welche Adäquatheitsbedingungen die Standardkonzeption unterstellt, um daraufhin zu zeigen, dass diese Adäquatheitsbedingungen zugunsten der im Rahmen dieser Arbeit unterstellten Bedingung der Verifikationsakkuratheit aufzugeben sind.

Im Rahmen der Standardkonzeption wird die Frage nach den Adäquatheitsbedingungen von Wahrheitsbedingungsangaben kaum ausdrücklich diskutiert. Es scheint jedoch, dass den Ausführungen Benacerrafs in (1973) entnommen werden kann, worin im Rahmen der Standardkonzeption der allgemeine – wenngleich unausgedrückte – Konsens im Hinblick auf die Adäquatheitsbedingungen von Wahrheitsbedingungsangaben besteht. Dieser Konsens ist durch zwei Annahmen bestimmt. So wird zum einen angenommen, dass die im Tarskischen Sinn formulierten Wahrheitsbedingungen elementarer empirischer Aussagen mehr oder weniger fraglos als adäquat können (vgl. Benacerraf 1973, S. 667). Zum anderen wird davon ausgegangen, dass das logische Vokabular, welches nicht nur in empirischen Aussagen, sondern in Aussagen beliebiger Art gebraucht wird, in allen Kontexten dieselbe Bedeutung hat (vgl. Benacerraf 1973, S. 667). Diese zweite Annahme sei im Folgenden auch als die These der *Bereichsneutralität* des logischen Vokabulars bezeichnet.

Für die Erklärungen des Existenzquantors und des Identitätszeichens ergibt sich aus diesen beiden Annahmen unmittelbar die folgende Adäquatheitsbedingung:

> (SABL) Der Existenzquantor und das Identitätszeichen sind in allen Kontexten in ein und derselben Weise zu erklären; nämlich durch die Bestimmungen (EM) bzw. (IS).

Diese Bedingung fordert also, dass die Erklärungen des Existenzquantors und des Identitätszeichens nicht in Abhängigkeit von den entsprechenden Ergänzungsausdrücken variieren. In Verbindung mit der im Rahmen der Standardkonzeption ebenfalls üblichen Annahme, dass das arithmetische Gleichheitszeichen als Identitätszeichen aufzufassen ist, impliziert diese Bedingung also zum Beispiel, dass das arithmetische Gleichheitszeichen durch die Bestimmung (IS) zu erklären ist. Demzufolge wäre eine arithmetische Gleichung genau dann wahr, wenn die beiden rechts und links neben dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke sich auf denselben Gegenstand beziehen.

Anders als im Fall der Wahrheitsfunktionen setzen die Tarskischen Standarderklärungen des Existenzquantors (EM) und des Identitätszeichens (IS) voraus, dass die entsprechenden inhaltlichen Ergänzungsausdrücke in spezifischer Weise erklärt sind. So setzt etwa (IS) voraus, dass die Ausdrücke, welche das Identitätszeichen flankieren können, durch die Angaben entsprechender Bezugsregeln erklärt sind. Aus der auf die Erklärung der logischen Zeichen bezogenen Adäquatheitsbedingung (SABL) ergibt sich somit die folgende, auf die Erklärungen des inhaltlichen Vokabulars bezogene Adäquatheitsbedingung:

> (SABI) Inhaltliche Zeichen, welche relativ zu logischen Zeichen in denselben Positionen stehen können wie Namen oder Prädikate für raumzeitliche Gegenstände, sind durch Angaben von Bezugsregeln bzw. von Zutreffensbedingungen zu erklären.

Diese Bedingung impliziert also zum einen, dass ein inhaltlicher Ausdruck, der das Identitätszeichen flankieren kann, in analoger Weise wie ein Name für raumzeitliche Gegenstände zu erklären ist, nämlich durch die Angabe einer entsprechenden Bezugsregel. Und zum anderen ist gemäß (SABI) ein inhaltlicher Ausdruck, der sich mit dem Existenzquantor kombinieren lässt, in analoger Weise wie ein Prädikat für raumzeitliche Gegenstände zu erklären, d.h. also durch die Angabe entsprechender Zutreffensbedingungen. Die Bedingung (SABI) bestimmt somit also, dass das inhaltliche Vokabular beliebiger Kontexte – also nicht nur das empirische, sondern etwa auch das arithmetische Vokabular – jeweils in Namen und Prädikate zu unterteilen ist, d.h. also in Ausdrücke, die auf Gegenstände beziehen und Ausdrücke, die auf Gegenstände zutreffen.

Wenn man den Begriff der logischen Form in der Weise bestimmt, dass man von zwei Aussagen genau dann sagt, dass sie dieselbe logische Form haben, wenn beide Aussagen in derselben Weise aus denselben logischen Zeichen gebildet sind, dann können die beiden Adäquatheitsbedingungen (SABL) und (SABI) wie folgt in einer einheitlichen Formel zusammengefasst werden:

> (SAB) Wenn eine Aussage ‚p’ dieselbe logische Form wie eine empirische Aussage ‚q‘ hat, dann ist eine Wahrheitsbedingungsangabe von ‚p‘ nur dann adäquat, wenn sie in derselben Weise formuliert ist, wie die Standardformulierung der Wahrheitsbedingungen von ‚q‘.

Während also die aus der Gebrauchstheorie der Bedeutung abgeleitete Adäquatheitsbedingung für Wahrheitsbedingungen fordert, dass die Wahrheitsbedingungsangaben von Aussagen mit analogen *Verifikationsmethoden* in analoger Weise zu formulieren sind, wird im Rahmen der Standardkonzeption gefordert, dass die Wahrheitsbedingungen derjenigen Aussagen in analoger Weise zu formulieren sind, welche eine analoge *logische Form* haben. Wird die Rede von der Syntax von Aussagen in diesem im logischen Sinn interpretiert, so kann man also sagen, dass im Rahmen der Standardkonzeption nicht die Verifikationsakkuratheit, sondern die *Syntaxakkuratheit* von Wahrheitsbedingungsangaben gefordert wird. Dementsprechend ist die Art und Weise, in der die Wahrheitsbedingungen einer Aussage zu formulieren sind, nicht einer Reflektion auf die Verifikationsmethode der Aussage zu entnehmen, sondern einer Betrachtung ihrer durch die logischen Ausdrücke bestimmten Form. Etwas plakativ ausgedrückt, könnte man daher sagen, dass die Formulierung der Wahrheitsbedingungen einer Aussage im Rahmen der Standardkonzeption nicht durch die Verwendungsweise der Aussage, sondern durch deren Form bestimmt wird.

Dass Syntax- und Verifikationsanalysen zu unterschiedlichen Wahrheitsbedingungsangaben führen können, soll nun am Beispiel von Aussagen über die Reihenfolge von Buchstaben im lateinischen Alphabet gezeigt werden. Hierbei sei angenommen, dass die Buchstaben des Alphabets der Reihe nach in einer Liste niedergeschrieben sind, welche für die Verifikation der Alphabetaussagen konsultiert wird. Die Verwendung dieser Aussagen setzt somit nicht voraus, dass die Sprecher das Alphabet auswendig aufsagen können. Die Verifikation einer durch zwei lateinische Buchstaben ‚α' und ‚β' gebildeten elementaren Alphabetaussage ‚α folgt auf β' bestehe nun darin, festzustellen, ob ‚α' in der Alphabetliste direkt hinter ‚β' steht. Ist dies der Fall, gilt die Aussage als wahr; anderenfalls als falsch. Dementsprechend besteht die Erzeugung einer Aussage der Form ‚α folgt auf β' also darin, dass diese geäußert wird, nachdem bei der Konsultation der Liste festgestellt wird, dass ‚α' direkt hinter ‚β' steht. Und die Entscheidung von ‚α folgt auf β' stellt sich derart dar, dass nach der Äußerung von ‚α folgt auf β' wird die Liste konsultiert, um die fragliche Äußerung zu bejahen, falls hierbei festgestellt wird, dass ‚α' direkt hinter ‚β' steht, und anderenfalls zu verneinen. Wenn sich die Verifikation der elementaren Alphabetaussagen in der geschilderten Weise darstellt, können die Wahrheitsbedingungen dieser Aussagen dieser Art wie folgt *verifikationsakkurat* formuliert werden:

‚α folgt auf β' ist wahr $\Leftrightarrow$ In der Alphabetliste steht ‚α' direkt hinter ‚β'.

Die Vorgänger und Nachfolger von Buchstaben im Alphabet sind jeweils eindeutig bestimmt, da zum einen auf jeden Buchstaben höchstens ein Buchstabe folgt, und da zum anderen jeder Buchstabe auf höchstens einen Buchstaben folgt. Aufgrund dieser Eindeutigkeit können die entsprechenden Nachfolgeraussagen auch durch den Gebrauch des Identitätszeichens formuliert werden, welches sich also durch die folgende Bestimmung in die Alphabetsprache einführen lässt:

‚α = Nachfolger von β' bedeutet: α folgt auf β

Genau wie ‚α folgt auf β' wird hiernach also auch ‚α = Nachfolger von β' in der Weise verifiziert, dass festgestellt wird, ob ‚α' in der Alphabetliste direkt hinter ‚β' steht.

Durch die Anwendung der Wahrheitsunktionen auf elementare Alphabetaussagen lassen sich komplexe Alphabetaussagen in der Art von ‚d = Nachfolger von c $\wedge$ e = Nachfolger von d' bilden. Die Wahrheitsbedingungsbeiträge der Wahrheitsfunktionen können hierbei in der im Rahmen der Standardkonzeption üblichen Weise angegeben werden. Sei nun ‚p(x)' ein Ausdruck, der durch Ersetzung mindestens eines Buchstabenvorkommnisses aus einer elementaren oder wahrheitsfunktionalen Alphabetaussage ‚p' entsteht, so bestehe die Verifikation der entsprechenden Existenzaussage ‚$\exists$x(p(x))' darin, alle Aussagen zu verifizieren, die aus ‚p(x) ' durch die Ersetzung von ‚x' durch einen Buchstaben resultiert. Dabei gelte ‚∃x(p(x))' genau dann als wahr, wenn sich hierbei mindestens eine dieser Aussagen als wahr erweist. Dementsprechend wäre also etwa eine Existenzaussage der Form ‚∃x (x folgt auf β)' durch die Feststellung zu verifizieren, ob sich in der Alphabetliste ein Buchstabe findet, der direkt vor ‚β' steht. Diese Verifikationsmethode der Existenzaussagen der Alphabetaussagen kann also durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe akkurat kodifiziert werden:

> ‚∃x(p(x))' ist wahr ⇔ In der Alphabetliste gibt es ein ‚α' derart, dass ‚p(α)' wahr ist.[17]

Die Alphabetsprache sei nun nach den Prinzipien der Standardkonzeption analysiert. Da sie das Identitätszeichen flankieren können, wären Buchstaben im Rahmen der Standardkonzeption als *Namen* aufzufassen. Die Verwendung eines Buchstabens in Alphabetaussagen wäre demnach durch die Angabe einer Regel anzugeben, die bestimmt, auf welchen Gegenstand der Buchstabe sich bezieht. Der Ausdruck ‚folgt auf' wäre aufgrund seiner Kombinierbarkeit mit dem Existenzquantor als zweistelliges Prädikat aufzufassen, dessen Verwendung dementsprechend durch die Angaben von Bedingungen dafür anzugeben wäre, dass ‚folgt auf' auf zwei Gegenstände zutrifft. Gemäß der Standardkonzeption wären die elementaren Alphabetaussagen dem zu Folge als Prädikationen aufzufassen, deren Wahrheitsbedingungen – der Standarderklärung (IP) folgend – somit in der folgenden Weise anzugeben wären:

> ‚α folgt auf β' ist wahr ⇔ ‚folgt auf' trifft auf die Gegenstände zu, auf die ‚α' und ‚β' sich beziehen.

Aus der nach Standardauffassung für alle Kontexte adäquaten Erklärung des Existenzquators (EM) wären ferner die Wahrheitsbedingungen einer einfachen Existenzaussagen der Form ‚∃x (x folgt auf β)' wie folgt anzugeben:

> ‚∃x (x folgt auf β)' ist wahr ⇔ Es gibt einen Gegenstand, auf den ‚folgt auf β' zutrifft.

Wenn die Alphabetaussagen in der zuvor geschilderten Weise durch das Betrachten der Alphabetliste verifiziert werden, dann sind diese Wahrheitsbedingungen offenbar nicht verifikationsakkurat. Denn nach Standardkonzeption wäre etwa eine elementare Alphetaussage

[17] Eine hierzu äquivalente Möglichkeit dafür, die Verwendung des Existenzquantors innerhalb der Alphabetsprache zu erklären, bestünde in der folgenden analytischen Erklärung: ‚∃x(p(x))' bedeutet: p(a) ∨ p(b) ∨ ... ∨ p(y) ∨ p(z).

der Form ‚α folgt auf β' *nicht* durch die Feststellung zu verifizieren, ob ‚α' in der Alphabetliste direkt hinter ‚β' steht. Vielmehr müsste sich die Verifikation einer solchen Aussage in der Weise gestalten, dass zunächst diejenigen Gegenstände identifiziert werden, auf welche sich die Namen ‚α' und ‚β' beziehen, um daraufhin festzustellen, ob das zweistellige Prädikat ‚folgt auf' auf diese beiden Gegenstände zutrifft. Und analog hierzu wäre eine Existenzaussage der Form ‚$\exists$x (x folgt auf β)' der Standardkonzeption zu Folge nicht der Weise zu verifizieren, dass festgestellt wird, ob auf der Alphabetliste ein Buchstabe direkt vor ‚β' steht. Stattdessen müsste sich die Verifikation einer solchen Aussage derart darstellen, dass alle Gegenstände, auf welche sich die Buchstaben des Alphabets beziehen, der Reihen nach identifiziert und daraufhin untersucht werden, ob das einstellige Prädikat ‚folgt auf β' auf sie zutrifft.

Da jedoch ein Anwenden der Buchstaben auf Gegenstände, welches durch entsprechende Bezugsregeln zu kodifizieren wäre, nicht Teil der Verwendung der Alphabetaussagen ist, sind Buchstaben in der Alphabetsprache keine *Namen*, also keine Ausdrücke, welche durch die Zuordnung irgendwelcher Gegenstände zu erklären sind. Aus diesem Grund kann man auch nicht sagen, dass die Wahrheit einer Alphabetaussage davon abhänge, auf welche *Gegenstände* die Buchstaben anwendbar sind. Man könnte allerdings sagen, sie hänge davon ab, auf welche *Buchstaben* der Ausdruck ‚folgt auf' anwendbar ist. Wenn der Ausdruck ‚folgt auf' als ein *Prädikat* und somit als ein Ausdruck aufgefasst werden soll, dessen Verwendung durch Angabe entsprechender Zutreffensbedingungen zu erklären ist, dann müssen also die Buchstaben des Alphabets – und nicht deren vermeintliche Bezugsgegenstände – als diejenigen Gegenstände aufgefasst werden, die für ein solches Zutreffen in Frage kommen. Und wenn in diesem Sinn bestimmt wird, dass ‚folgt auf' genau dann auf zwei Buchstaben ‚α' und ‚β' zutrifft, wenn ‚α' in der Alphabetliste direkt hinter ‚β' steht, dann müssten die Wahrheitsbedingungen der elementaren Alphabetaussagen in der folgenden – anstatt in der durch (IP) bestimmten – Weise angegeben werden:

‚α folgt auf β' ist wahr $\Leftrightarrow$ ‚folgt auf' trifft auf ‚α' und ‚β' zu.

Aus der Betrachtung der Alphabetaussagen ergeben sich somit die folgenden Konsequenzen für die Bewertung der Adäquatheitsbedingungen der Standardkonzeption. Zunächst zeigt der Vergleich zwischen empirischen Aussagen und den Aussagen der Alphabetsprache, dass die Bereichsneutralitätsannahme, auf der die Adäquatheitsbedingung (SABL) beruht, problematisch ist. Richtig ist zwar, dass elementare Alphabetaussagen entsprechende Existenzaussagen implizieren, so dass sich also die folgende Implikationsregel formuliert lässt werden, welche an die im Abschnitt zuvor zitierte Regel erinnert, der zu Folge empirische Existenzaussagen durch entsprechende Prädikationen impliziert werden:

Wenn ‚α folgt auf β‘ wahr ist, dann ist ‚$\exists$x (x folgt auf β)‘ wahr.

Aber wie zuvor gesehen, folgt hieraus nicht, dass elementare Alphabetaussagen und entsprechende Existenzaussagen in analoger Weise verifiziert werden wie empirische Prädikationen und empirische Existenzaussagen. Und analog hierzu folgt daraus, dass sich die *Logik* von empirischen Identitätsaussagen und den Identitätsaussagen der Alphabetsprache in ähnlicher Weise darstellt nicht, dass das Identitätszeichen in Aussagen beider Art jeweils denselben *Verifikationsschritt* bestimmt. Das bedeutet also, dass die Bereichsneutralität des Existenzquantors und des Identitätszeichens nicht die *Verifikationsregeln*, sondern bestenfalls die *Implikationsregeln* der durch diese Ausdrücke gebildeten Aussagen betrifft.

In Kapitel 5 soll dafür argumentiert werden, dass ein Ausdruck, der in seinem jeweiligen Kontext die Logik eines Ersetzbarkeitszeichens bzw. die eines Einsetzbarkeitszeichens hat, eben *darum* als Identitätszeichen bzw. als Existenzquantor aufgefasst werden kann. Der Grund dafür, dass in diesen Fällen ein und derselbe Ausdruck – also ‚$\exists$‘ bzw. ‚=‘ – in verschiedenen Kontexten gebraucht wird oder zumindest gebraucht werden kann, besteht also *nicht* darin, dass diese Ausdrücke in allen Kontexten jeweils denselben Verifikationsschritt bestimmen. Er besteht vielmehr darin, dass der Existenzquator und das Identitätszeichen jeweils auf die dieselben Implikationsregeln verweisen. Aus diesem Grund garantiert die durch die allgemeine Adäquatheitsbedingung (SBA) geforderte Syntaxakkuratheit von Wahrheitsbedingungsangaben zwar nicht die Verifikationsakkuratheit, jedoch immerhin die *Implikationsakkuratheit* von Wahrheitsbedingungsangaben.

Natürlich hängt, welche Ansprüche man Wahrheitsbedingungsangaben stellt, von den Zielen ab, die man durch diese Angaben zu erreichen sucht. Falls sich das Interesse auf eine akkurate Formulierung der wahrheitswerterhaltenden Umformungen zwischen bestimmten Aussagen beschränkt, so muss im Prinzip nicht die Verifikationsakkuratheit, sondern nur die schwächere Bedingung der Implikationsakkuratheit gefordert werden. Diesem Ziel stünde die Adäquatheitsbedingung (SAB) also nicht entgegen. Besteht das Ziel jedoch darin, nicht nur darzustellen, in welcher Weise der Wahrheitswert einer Aussage von dem Wahrheitswert einer anderen Aussage abhängt, sondern auch, in welcher Weise der Wahrheitswert einer Aussage gegebenenfalls von der *Wirklichkeitsbeschaffenheit* abhängt, dann muss auch die Verifikationsakkuratheit der entsprechenden Wahrheitsbedingungsangaben gefordert werden. So kann insbesondere die im Rahmen dieser Arbeit zu diskutierende Frage danach, ob mathematische Aussagen die Wirklichkeit darstellen, nur auf der Grundlage verifikationsakkurater Wahrheitsbedingungsangaben für mathematische Aussagen beantwortet werden. Da die Annahme von (SAB), wie das Beispiel der Alphabetaussagen zeigt, zu Wahrheitsbedingungsangaben führen kann, die nicht verifikationsakkurat sind, ist diese Bedingung also für die hier verfolgten Zwecke zugunsten der bereits in Abschnitt 1.1 formulierten Bedingung der Verifikationsakkuratheit aufzugeben.

Zuletzt sei darauf hingewiesen, dass die im Rahmen der Standardkonzeption unterstellte Adäquatheitsbedingung für die Erklärung des inhaltlichen Vokabulars (SABI) im Prinzip schon impliziert, dass *jede* Aussage von Gegenständen handelt, welche nicht in der Aussage selbst gegeben sind, sondern auf die sich die Aussage bezieht. Das bedeutet, dass Wittgensteins Autonomiethese, der zu Folge mathematische Aussagen nicht die Wirklichkeit darstellen, bereits mit der Standardkonzeption der wahrheitskonditionalen Semantik als solcher *unvereinbar* ist, da diese Konzeption ganz allgemein voraussetzt, dass Aussagen jedweder Art bestimmte Gegenstände – also Elemente der Wirklichkeit – darstellen. Wird (SABI) vorausgesetzt, so ist damit die Frage, ob auch mathematische Aussagen die Wirklichkeit darstellen, bereits im affirmativen Sinn beantwortet. Es stellt sich dann bestenfalls noch die Frage danach, *welchen Wirklichkeitsbereich* diese Aussagen darstellen. Auch wenn erst später – in Abschnitt 6.3 – dafür argumentiert werden soll, dass die für die Arithmetik grundlegenden arithmetischen Nachfolgeraussagen in ähnlicher Weise wie die Nachfolgeraussagen der Alphabetsprache aufzufassen sind, zeigt das Beispiel der Alphabetsprache bereits, dass es Aussagen gibt, welche nicht die Wirklichkeit darstellen. Denn im Widerspruch zu (SABI) sind die Gegenstände, von denen die Alphabetaussagen handeln – nämlich die Buchstaben des Alphabets – in den fraglichen Aussagen selbst enthalten.[18]

Zum Abschluss dieses Kapitels soll nun noch ein knapper Ausblick auf den weiteren Verlauf der Untersuchungen gegeben werden. Zunächst soll in den beiden folgenden Kapiteln der soeben bereits gebrauchte Begriff der *Implikation* näher untersucht werden. Zum einen soll hierdurch der allgemeine Zusammenhang zwischen den Wahrheitsbedingungen, den Verifikationsregeln und den Implikationsregeln von Aussagen geklärt werden. Zum anderen soll durch diese Untersuchungen der in Kapitel 9 zu entwickelnde Beweis von Wittgensteins Normativitätsthese vorbereitet werden, der zu Folge arithmetische Gleichungen Implikationsregeln ausdrücken.

[18] In Abschnitt 6.1 soll erläutert werden, dass sich im Rahmen der Alphabetsprache erst dann darstellende Aussagen bilden lassen, wenn zugelassen wird, dass auch demonstrative Ausdrücke oder Raumzeitkennzeichnungen von Buchstaben die Stellen der Buchstaben einnehmen können. Denn erst der Wahrheitswert einer Aussage in der Art von ‚Der Buchstabe, der auf der Tafel nebenan steht folgt auf den Buchstaben, mit dem das Nummernschild meines Autos beginnt' hängt tatsächlich in der von der Standardkonzeption anvisierten Weise von der Wirklichkeitsbeschaffenheit ab.

In den Kapiteln 4-7 soll dann die Verwendung des arithmetischen Vokabulars in empirischen und in arithmetischen Aussagen dargestellt werden. Hierfür werden zunächst in Kapitel 4 empirische Aussagen über die Anzahlen materieller Gegenstände analysiert. Nach einem Exkurs in Kapitel 5 zur Verwendung sogenannter abstrakter Sortale – zu denen insbesondere der Ausdruck ‚Zahl' zu rechnen ist –, soll dann die Verwendung arithmetischer Gleichungen (in Kapitel 6) und arithmetischer Gesetze (in Kapitel 7) analysiert werden. Alle der in diesen vier Kapiteln vorzunehmenden Verwendungsanalysen werden sich dabei in der Weise gestalten, dass jeweils aus Analysen der Verifikationsregeln der fraglichen Aussagen entsprechende Wahrheitsbedingungsangaben abgleitet werden.

Auf der Grundlage dieser semantischen Analysen sollen dann in den beiden letzten Kapiteln dieser Arbeit Wittgensteins Hauptthesen zur Philosophie der Mathematik bewiesen werden. So soll in Kapitel 8 zunächst dafür argumentiert werden, dass arithmetische Aussagen insofern autonom sind, als ihre Wahrheitswerte – ähnlich, wie die Wahrheitswerte der Alphabetaussagen – nicht von der Beschaffenheit der Wirklichkeit, sondern lediglich von der Form dieser Aussagen abhängig sind. Und in Kapitel 9 soll dann zuletzt gezeigt werden, dass arithmetische Gleichungen in der Tat als Implikationsregeln für empirische Zahlaussagen angewendet werden.

2. Tautologien und Implikationen

Nachdem in vorangegangen Kapitel die semantischen Grundbegriffe der *Wahrheit* und der *Wahrheitsbedingungen* von Aussagen operational interpretiert wurden, soll eine solche Interpretation in diesem Kapitel auch für den logischen Grundbegriff der *Implikation* und die mit diesem Begriff zusammenhängende Unterscheidung zwischen *synthetischen* und *analytischen* Aussagen entwickelt werden. Wie sich später zeigen wird, ist eine Analyse dieser logischen Grundbegriffe sowohl für das Verständnis als auch für die Beweise der beiden Wittgensteinschen Hauptthesen zur Philosophie der Mathematik relevant. Denn dass mathematische Aussagen im Allgemeinen und arithmetische Gleichungen im Besonderen autonom in Wittgensteins Sinn sind, soll in Kapitel 8 aus dem analytischen Charakter dieser Aussagen abgleitet werden. Und für den in Kapitel 9 zu entwickelnden Beweis von Wittgensteins Normativitätsthese wird zu zeigen sein, dass die außermathematische Anwendung arithmetischer Gleichungen darin besteht, diese als Ausdruck dafür zu benutzen, dass bestimmte Zahlaussagen analytisch sind bzw. einander implizieren.

2.1 Gemäß einer gängigen, wenn auch nicht unumstrittenen Bestimmung der traditionellen Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen, ist eine Aussage *synthetisch*, falls ihr Wahrheitswert von Erfahrungstatsachen abhängig ist, und sie ist *analytisch*, falls ihr Wahrheitswert *nur* von ihrer Bedeutung abhängt. [1] Wahre analytische Aussagen seien im Folgenden auch als *tautologisch*, und falsche analytische Aussagen als *kontradiktorisch* bezeichnet. Dementsprechend ist eine Aussage tautologisch, falls sie allein aufgrund ihrer Bedeutung wahr ist, und sie ist kontradiktorisch, falls sie allein aufgrund ihrer Bedeutung falsch ist.[2]

Die im ersten Kapitel dieser Arbeit angestellten Überlegungen zum Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert und der Bedeutung einer Aussage legen es nahe, die soeben formulierten Bestimmungen in zweierlei Weise zu modifizieren. Wie in den Abschnitten 1.5-1.7 erläutert wurde, ist der Wahrheitswert einer Aussage prinzipiell raumzeitstellenrelativ zu konzipieren. Und damit, dass eine Aussage allein aufgrund ihrer Bedeutung wahr ist, ist natürlich gemeint, dass sie allein aufgrund ihrer Bedeutung *immer* und *überall* wahr ist. Und ebenso ist damit, dass eine Aussage allein aufgrund ihrer Bedeutung falsch ist, gemeint, dass sie aufgrund ihrer Bedeutung immer und überall falsch. Da ferner die Rede von der Bedeutung einer Aussage

[1] Eine kritische Diskussion der Einwände gegen diese Definition von ‚analytisch' findet sich in Schröder 2009.
[2] Es ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, dass der Ausdruck ‚analytisch', anders als hier, oftmals auf wahre Aussagen eingeschränkt wird.

durch die Rede von ihren Wahrheitsbedingungen ersetzt werden kann, bietet es sich an, die Ausdrücke ‚tautologisch' und ‚kontradiktorisch' in der folgenden Weise zu explizieren:

> Eine Aussage heiße genau dann *tautologisch*, wenn sie allein aufgrund ihrer Wahrheitsbedingungen immer und überall wahr ist. Und entsprechend heiße eine Aussage genau dann *kontradiktorisch*, wenn sie allein aufgrund ihrer Wahrheitsbedingungen immer und überall falsch ist.

Die in dieser Weise definierte Unterscheidung zwischen synthetischen und analytischen Aussagen präzisiert die innerhalb der Diskussion der Alphabetsprache in Abschnitt 1.8 bereits vage angedeutete Unterscheidung zwischen *darstellenden* und nicht darstellenden Aussagen. Der fragliche Unterschied kann demnach also auch wie folgt ausgedrückt werden: Während die Wahrheitsbedingungen einer analytischen Aussage bereits bestimmen, ob die Aussage an einer beliebigen Raumzeitstelle wahr bzw. falsch ist, bestimmen die Wahrheitsbedingungen einer synthetischen Aussage lediglich, wie die Wirklichkeit beschaffen sein muss, damit die Aussage an einer bestimmten Raumzeitstelle wahr ist.

Dass eine Aussage allein aufgrund ihrer Wahrheitsbedingungen immer und überall wahr ist, ist nun so zu verstehen, dass eine *Angabe* ihrer Wahrheitsbedingungen *impliziert*, dass sie immer und überall wahr ist. Angenommen, die Wahrheitsbedingungen einer Aussage ‚p' seien in Folge einer Analyse oder einer Stipulation ihrer Bedeutung – bzw. der Bedeutung ihrer Teilausdrücke – formuliert, dann ist ‚p' genau dann tautologisch, wenn sich aus der fraglichen Wahrheitsbedingungsangabe ableiten lässt, dass ‚p' an jeder Raumzeitstelle wahr ist. Und analog hierzu ist ‚p' genau dann kontradiktorisch, wenn sich aus der Wahrheitsbedingungsangabe ableiten lässt, dass ‚p' an jeder Raumzeitstelle falsch ist. Geht man von der Rede von Wahrheitsbedingungen zur Rede von Bedeutungen zurück, so kann man also sagen, dass eine Aussage genau dann aufgrund ihrer Bedeutung wahr ist, wenn eine Erklärung ihrer Bedeutung impliziert, dass die fragliche Aussage immer und überall wahr ist. Und wenn der Ausdruck ‚Definition' derart weit gedeutet wird, dass er nicht nur analytische Definitionen, sondern Verbalerklärungen jedweder Form umfasst, dann kann man also auch sagen, dass eine Aussage genau dann tautologisch ist, wenn sie *per Definition* immer und überall wahr ist.[3]

In Abschnitt 2.2 soll untersucht werden, in welcher Weise die sich die Verifikation analytischer Aussagen darstellen kann. Nachdem in 2.3 Möglichkeiten dafür diskutiert werden, in

[3] Wie in Abschnitt 1.5 erläutert wurde, lassen sich auch praktische Erklärungen – wie insbesondere die hinweisenden Erklärungen – verbal kodifizieren lassen. Wenn etwa das Prädikat ‚rot' bei (s,t) durch Hinweis auf ein entsprechendes Farbtäfelchen definiert wird, so lässt sich diese Erklärung durch die folgende Verbalerklärung kodifizieren: ‚rot' trifft genau auf einen Gegenstand x zu, wenn x farbgleich zu demjenigen Farbtäfelchen ist, das sich zum Zeitpunkt t am Ort s befand.

welcher Weise in einem Verwendungsverzeichnis festgehalten werden kann, dass bestimmte Aussagen tautologisch, kontradiktorisch oder synthetisch sind, soll in 2.4 diskutiert werden, welche Verwendung von Erkenntnissen der entsprechenden Art gemacht werden kann. In 2.5 sollen schließlich die mit dem Begriff der Tautologie eng zusammenhängenden Beziehungen der *Implikation* und der *Äquivalenz* analysiert werden. Zuvor sei jedoch noch in diesem Abschnitt die Unterscheidung analytisch/synthetisch anhand entsprechender Aussagen aus den drei im ersten Kapitel eingeführten Sprachen – also der Alphabetsprache, der Situationssprache und der Raumsprache – illustriert. Auf die hierbei dargestellten Beispiele soll dann auch in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels zurückgegriffen werden.

Eine atomare *Alphabetaussage* der Form ‚α folgt auf β' ist genau dann wahr, wenn in der Alphabetliste, durch welche die Bedeutung von ‚folgt auf' erklärt wird, ‚α' direkt hinter ‚β' steht. Dementsprechend wird der Wahrheitswert einer solchen Aussage also durch ihre Wahrheitsbedingungsangabe – oder, genauer, durch die Bedeutungserklärung von ‚folgt auf' – impliziert. So impliziert die Bedeutungserklärung von ‚folgt auf' etwa, dass ‚d folgt auf c' immer und überall wahr ist, insofern ‚d' in der Alphabetliste unmittelbar hinter ‚c' steht. Und insofern die Wahrheitswerte aller anderen Alphabetaussagen aus den Wahrheitswerten der atomaren Aussagen folgen, ist also die gesamte Alphabetsprache analytisch. D.h., wahre Alphabetaussagen sind tautologisch, Falsche kontradiktorisch.

Dasselbe gilt offenbar nicht für die *Situationssprache*. So ist eine atomare Situationsaussage wie etwa ‚Es regnet' synthetisch, da ihr Wahrheitswert von der Beschaffenheit ihrer jeweiligen Äußerungssituation – in diesem Fall also von der dortigen Wetterlage – abhängt. Allerdings finden sich zumindest unter den *komplexen* Situationsaussagen auch solche, die analytisch sind. Hierbei können zwei Arten solcher Aussagen unterschieden werden: *wahrheitsfunktional-analytische* und *begrifflich-analytische* Aussagen. Als Beispiel einer wahrheitsfunktional-tautologischen Aussage sei zunächst die durch die komplexe Wahrheitsfunktion ‚p∨¬p' gebildeten Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' betrachtet. Den Wahrheitswerttafeln von ‚¬' und ‚∨' kann entnommen werden, dass ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' sowohl dann wahr ist, wenn das einzige Argument ‚Es regnet' wahr ist, als auch dann, wenn es falsch ist. Da er nicht vom Wahrheitswert von ‚Es regnet' abhängt, ist der Wahrheitswert von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' unabhängig von der jeweiligen Wetterlage und von der Wirklichkeitsbeschaffenheit überhaupt. Die Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' ist somit analytisch. Diese Erkenntnis kann nun in zweierlei Weise verallgemeinert werden. Zum einen lässt sie sich auf jede andere Aussage übertragen, welche ebenfalls durch die Wahrheitsfunktion ‚p∨¬p' gebildet ist. Und wenn ferner diejenigen Wahrheitsfunktionen *konstant* genannt werden, welche – so wie ‚p∨¬p' – für jede Verteilung von Wahrheitswerten auf ihre Argument ein und denselben Wahrheitswert bestimmen, dann kann zum anderen ganz allgemein Folgendes gesagt werden: Genau dann, wenn eine Wahrheitsfunktion konstant ist, ist der Wahrheitswert jeder durch sie gebildeten Aussage unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Argumente und damit auch unabhängig von der Wirklichkeitsbeschaffenheit. Wahrheitsfunktional-analytisch sind also genau diejenigen Aussagen, welche durch konstante Wahrheitsfunktionen gebildet sind.

Eine analytische Aussage, deren analytischer Charakter nicht allein auf das in ihr enthaltene logische Vokabular, sondern teilweise auch ihr inhaltliches Vokabular zurückzuführen ist, soll im Folgenden *begrifflich-analytisch* genannt werden. Wie gleich zu erläutern sein wird, handelt es sich z.B. bei Aussagen deren Wahrheitswerte durch die Regeln der Farbausschließung bestimmt sind, um begrifflich-analytische Aussagen in diesem Sinn. Dass eine Aussage wie etwa

Dies ist rot, und es ist grün[4]

notwendigerweise falsch ist, ist zwar kaum umstritten. Weniger klar ist dagegen, ob Aussagen dieser Art auch als *analytisch* gelten können. Um zu zeigen, dass die Wahrheitswerte dieser Aussagen allein durch ihre Bedeutungen bestimmt sind, muss gezeigt werden, dass die Regeln der Farbausschließung *semantischer* Art sind. Der Einfachheit halber sollen demonstrative Aussage im Folgenden auch wieder ohne das Präfix ‚dies ist' formuliert werden. In diesem Sinn soll also etwa die Beispielaussage ‚Dies ist rot, und es ist grün' auch in der Form ‚Rot ∧ Grün' notiert werden.

Dass ‚Rot ∧ grün' analytisch – oder genauer: kontradiktorisch – ist, kann nun in der folgenden Weise durch Bezug auf die Paradigmenerklärungen von ‚rot' und ‚grün' durch entsprechende Farbtäfelchen gezeigt werden. Zunächst lässt sich aus der Bedeutungserklärung von ‚∧' ableiten, dass ‚Rot ∧ Grün' nur dann wahr sein kann, wenn sowohl ‚Rot' als auch ‚Grün' wahr ist; und das bedeutet: wenn sowohl ‚rot' als auch ‚grün' auf den Gegenstand zutreffen, auf welchen während der Äußerung von ‚Rot ∧ Grün' gezeigt wird. Nach den Paradigmenerklärungen von ‚rot' und ‚grün' ist dies äquivalent dazu, dass der fraglichen Gegenstand sowohl mit dem Rottäfelchen als auch mit dem Grüntäfelchen farbgleich ist. Dieser Fall kann nun aber durch die Feststellung ausgeschlossen werden, dass das Rot- und das Grüntäfelchen nicht farbgleich miteinander sind. Die Transitivität der Farbgleichheit vorausgesetzt, kann also durch einen Farbvergleich der beiden in den Paradigmenerklärungen von ‚rot' und ‚grün' gegebenen Farbtäfelchen auf die Falschheit von ‚Rot ∧ Grün' geschlossen werden.

[4] Streng genommen, müsste es zwar ‚Dies ist überall rot, und es ist überall grün' heißen; der Einfachheit halber soll auf diesen Zusatz hier und in der Folge jedoch verzichtet werden.

Diese Methode ist offenbar verallgemeinerbar! Angenommen, zwei Prädikaten seien durch entsprechende Paradigmenerklärungen zwar dieselbe Vergleichsmethode, jedoch jeweils verschiedene Paradigmen zugeordnet. Und angenommen ferner, die fragliche Vergleichsmethode sei durch eine Gleichheitsbeziehung wie z.B. die Farb-, Form- oder Längengleichheit bestimmt; also durch eine Beziehung, die insbesondere transitiv ist, so dass also je zwei Gegenstände zueinander in der fraglichen Beziehung stehen, wenn sie zu einem Dritten in Beziehung stehen. In diesem Fall können auch die Paradigmen der beiden Terme entsprechend der Vergleichsmethode miteinander verglichen werden. So können etwa Farb-, Form- oder Längenmuster untereinander in Hinblick auf ihr Farbe, Form bzw. Länge verglichen werden. Und nun gilt: Falls die Paradigmen in der durch die Vergleichsregel bestimmten Hinsicht verschieden sind, dann können in einer wahrheitsfunktionalen Aussagen, in der die den beiden Prädikaten entsprechenden demonstrativen Aussagen als Argumente vorkommen, all diejenigen Wahrheitsmöglichkeiten eliminiert werden, welche die Wahrheit dieser beiden Argumente vorsehen. Und umgekehrt können, im Fall der Gleichheit der Paradigmen all diejenigen Wahrheitsmöglichkeiten eliminiert werden, welche verschiedene Wahrheitswerte für beide Argumente vorsehen. Wenn also etwa ein Vergleich der den Längenausdrücken ‚Meter' und ‚Fuß' entsprechenden Maßstäbe ergibt, dass ein Meter ebenso lang wie 3.3 Fuß ist, dann können stets Wahrheitsmöglichkeiten, welche die Wahrheit von ‚1 Meter' und die Falschheit von ‚3.3 Fuß' vorsehen, ausgeschlossen werden. Mittels einer solchen Eliminierung ließe sich also etwa zeigen, dass ‚1 Meter ∧ ¬ 3.3 Fuß' begrifflich-kontradiktorisch ist.

Es sei ferner bemerkt, dass sich durch *analytische Definitionen* nicht nur die Wahrheitsbedingungsbeiträge, sondern auch alle anderen, davon abhängigen semantischen Merkmale des Definiens auf das Definiendum übertragen. In Folge dessen ist eine durch das Definiendum gebildete Aussage genau dann tautologisch, kontradiktorisch bzw. synthetisch, wenn dies auch für die entsprechende durch das Definiens gebildete Aussage gilt. So sind etwa ‚Schimmel ∧ ¬ weiß' und ‚Schimmel ∧ schwarz' kontradiktorisch, insofern ‚(Pferd ∧ weiß) ∧ ¬ weiß' wahrheitsfunktional-kontradiktorisch und ‚(Pferd ∧ weiß) ∧ schwarz' begrifflich-kontradiktorisch ist.

Nun zuletzt zu den Raumaussagen, deren Diskussion umfangshalber auf einige knappe Bemerkungen beschränkt sei. Zunächst kann den vorangegangen Untersuchungen entnommen werden, dass sich auch innerhalb der Raumsprache wahrheitsfunktional-analytische Aussagen von begrifflich-analytischen Aussagen unterscheiden lassen. Denn zum einen erzeugen konstante Wahrheitsfunktionen in jedem Fall analytische Aussagen; dies gilt also insbesondere auch dann, wenn es sich bei den Argumenten um Raumaussagen handelt. Demnach ist also z.B. jede Aussage der Form ‚a ist F ∨ ¬ a ist F' wahrheitsfunktional-tautologisch. Zum anderen ist jede

Raumaussage begrifflich-analytisch, deren Wahrheit äquivalent zur Existenz eines Ortes ist, an dem eine der Raumaussage entsprechende begrifflich-analytische Situationsaussage wahr ist. Wie zuvor bereits angedeutet, ist also etwa eine Raumaussage der Form ‚a ist rot ∧ a ist grün' in diesem Sinn begrifflich-kontradiktorisch. Denn die für die Wahrheit einer solchen Aussage erforderliche Existenz einer Raumzeitstelle, an der die demonstrative Aussage ‚dies ist a, und es ist rot, und es ist grün' (gleichzeitig) wahr ist, kann aufgrund des begrifflich-kontradiktorischen Charakters dieser zweiten Aussage ausgeschlossen werden.

Eine dritte Klasse analytischer Raumaussagen ergibt sich aus den Verwendungsregeln derjenigen Ausdrücke, auf welche die Situationstranszendenz dieser Aussagen zurückzuführen ist; also aus den Verwendungsregeln des Existenzquantors, des Identitätszeichens und der prädikativen Satzform.[5] Dabei können auch innerhalb dieser Klasse analytischer Aussagen zwei weitere Unterklassen unterscheiden werden. Zum einen die Klasse derjenigen Aussagen, deren analytischer Charakter sich daraus ergibt, dass in diesem Aussagen Raumaussagen und Situationsaussagen in bestimmter Weise miteinander kombiniert werden. In diesem Sinn ist etwa die Konjunktion einer Situationsaussage mit der Negation derjenigen Raumaussage kontradiktorisch, deren Wahrheit äquivalent zur Existenz eines Ortes ist, an dem die fragliche Situationsaussage (gleichzeitig) wahr ist. Hiernach ergibt sich also aus den in den Abschnitten 1.6 und 1.7 entwickelten Wahrheitsbedingungsangaben (E), (P) und (I), dass Aussagen der folgenden drei Formen kontradiktorisch sind:

Dies ist ein F ∧ ¬ Es gibt ein F.

Dies ist a, und es ist F ∧ ¬ a ist F.

Dies ist a, und es ist b ∧ ¬ a ist identisch mit b.

Und wie Abschnitt 1.7 bereits erläutert, kann aus den Wahrheitsbedingungsangaben der elementaren Raumaussagen ferner auch abgleitet werden, welche Kombinationen von Raumaussagen untereinander analytisch sind. Zu dieser zweiten Klasse analytischer Raumaussagen gehören also z.B. alle Aussagen der beiden folgenden Formen:

a ist F ∧ ¬ a existiert

a ist F ∧ ¬ Es gibt ein F

[5] Vgl. hierzu die Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 1.5.

Denn wie den Erklärungen (E), (P) und (SE) zu entnehmen ist, sind Aussagen dieser Art kontradiktorisch.

2.2 In diesem Abschnitt soll untersucht werden, in welcher Weise sich die Verwendungsweisen analytischer und synthetischer Aussagen unterscheiden. Wie in den Abschnitten 1.1 und 1.2 erläutert wurde, besteht die grundlegende Verwendung von Aussagen beliebiger Art in deren Erzeugung bzw. deren Entscheidung, also in der Äußerung der Aussage bzw. in der Bejahung bzw. Verneinung einer solchen Äußerung in Folge der Verifikation der Aussage. Ein Unterschied in der Verwendung zweier Aussagen besteht daher stets in einem Unterschied in deren Verifikation. Dass der Wahrheitswert einer Aussage von der Wirklichkeitsbeschaffenheit abhängt, bedeutet, dass entsprechende Wirklichkeitsuntersuchungen für seine Ermittlung konstitutiv sind. Für synthetische – d.h. also darstellende – Aussagen ist es wesentlich, dass bestimmte Wirklichkeitsuntersuchungen einen Teil ihrer Verifikation bilden. Umgekehrt müsste es für eine analytische Aussage wesentlich sein, dass für ihre Verifikation keine Wirklichkeitsuntersuchungen konstitutiv sind, insofern ihr Wahrheitswert unabhängig von der Beschaffenheit der Wirklichkeit ist. Die Frage danach, wie sich die Verifikation in diesem Fall gestalten kann, soll in diesem Abschnitt durch eine entsprechende Betrachtung analytischer Aussagen untersucht werden.

Zunächst zu den Aussagen der Alphabetsprache! Die Verifikation dieser Aussagen kann sich zum Einen derart darstellen, dass hierbei jeweils auf die Alphabetliste – also das Paradigma des grundlegenden Ausdrucks ‚folgt auf' – zurückgegriffen wird. So kann etwa die Aussage ‚d folgt auf c' in der Weise verifiziert werden, dass hierfür die Alphabetliste konsultiert und daraufhin festgestellt wird, ob in ‚d' dieser Liste unmittelbar hinter ‚c' steht. Um zu erhellen, inwiefern es sich hierbei nicht um eine Wirklichkeitsuntersuchung handelt, sei dieser Verifikationsvorgang mit der Verifikation der synthetischen Situationsaussage ‚Rot' (bzw. ‚Dies ist rot') verglichen. Falls ‚rot' durch Bezug auf ein entsprechendes Rottäfelchen erklärt ist, so wird für die Verifikation der Situationsaussage ‚Rot' zwar auch auf das fragliche Paradigma zurückgegriffen. Allerdings wird, ob diese Aussage wahr ist, nicht allein anhand des Rottäfelchens festgestellt, sondern vielmehr dadurch, dass ein jeweils angezeigter Gegenstand, daraufhin untersucht wird, ob er farbgleich mit dem Rottäfelchen ist. Die Situationsaussage ‚Rot' wird also in der Weise verifiziert, dass die Wirklichkeit – bzw. ein bestimmter Wirklichkeitsausschnitt – daraufhin untersucht wird, ob sie mit dem Paradigma übereinstimmt, welches die Bedeutung von ‚Rot' (partiell) bestimmt. Dagegen wird die Alphabetaussage ‚d folgt auf c' in der Weise verifiziert, dass *sie* – also die Alphabetaussage – daraufhin untersucht wird, ob sie mit dem formalen Paradigma übereinstimmt, welches die Bedeutung von ‚d folgt auf c' partiell bestimmt. Natürlich sind beide Paradigmen selbst Teil der Wirklichkeit; und somit stellt natürlich auch der

Rückgriff auf die Alphabetliste eine Art der Bezugnahme auf die Wirklichkeit dar. Aber im Rahmen der Verifikation werden die Paradigmen als Verifikationsinstrumente verwendet und sind somit in diesem Zusammenhang Mittel und nicht Gegenstand der jeweiligen Untersuchung. Man könnte auch sagen, die Paradigmen seien jeweils Maß und nicht Gemessenes (vgl. PU, §50). Und nur im Fall der Verifikation von ‚Rot' ist es die Wirklichkeit, die gemessen bzw. auf das Paradigma projiziert wird.

Angenommen nun, man kennt das Alphabet auswendig, so dass man also die Alphabetliste nicht zu konsultieren braucht, um festzustellen, dass z.B. ‚d' auf ‚c' folgt. In diesem Fall kann sich die Verifikation von ‚d folgt auf c' auch derart darstellen, dass einfach *unmittelbar* – also ohne Vermittelung durch weitere Handlungen – zur Äußerung dieser Aussage bzw. zur Bejahung einer solchen Äußerung übergegangen wird. In diesem Fall manifestiert sich der analytische Charakter dieser Aussage in ihrer Verifikation rein negativ, also durch die ersatzlose Abwesenheit von Wirklichkeitsuntersuchungen.

Eine dritte Möglichkeit dafür, wie sich die Verifikation von ‚d folgt auf c' darstellen kann, besteht darin, dass nachdem – entweder durch Konsultation der Liste oder aber nach dem Gedächtnis – festgestellt wird, dass ‚d' in der Alphabetliste unmittelbar hinter ‚d' steht, nicht, wie zuvor, direkt die Aussage ‚d folgt auf c' geäußert wird, sondern dass stattdessen vor dieser Äußerung zunächst die beiden metasprachlichen Aussagen geäußert werden ‚„d folgt auf c" ist genau dann wahr, wenn „d" auf der Alphabetliste direkt hinter „c" steht' sowie ‚„d" steht auf der Alphabetliste direkt hinter „c"'. Die Verifikation nimmt in diesem Fall also die Form eines *Arguments* an. Dabei bildet die zu verifizierende Aussagen ‚d folgt auf c' bzw. deren Bejahung die Konklusion, während die erste Prämisse die Wahrheitsbedingungen von ‚d folgt auf c' formuliert, und die Zweite behauptet, dass diese Wahrheitsbedingungen erfüllt sind. Die zweite Prämisse kann in diesem Zusammenhang ihrerseits durch die Betrachtung der Alphabetliste verifiziert werden, welche, wie zuvor, nicht als Wirklichkeitsuntersuchung aufzufassen ist. Eine Argumentation dieser Art kann insofern als ein Bedeutungsanalyse von ‚d folgt auf c' aufgefasst werden, als hierbei die Wahrheit dieser Aussage aus deren Bedeutungserklärung abgeleitet wird.[6]

Der analytischer Charakter der Alphabetaussagen manifestiert sich also derart in deren Verifikation, dass hierfür keine Wirklichkeitsuntersuchungen, sondern, wenn überhaupt, Untersuchungen von deren Bedeutungen angestellt werden. Denn entweder werden diese Aussagen einfach unmittelbar erzeugt bzw. entschieden, so dass es also überhaupt keine *echte* Verifikation gibt. Oder aber die Verifikation bezieht sich nur auf die Bedeutungserklärungen der fraglichen Aussagen, indem deren Wahrheitswerte hieraus verbal abgeleitet oder durch ein

[6] Eine Voraussetzung dieser Form der Verifikation von ‚d folgt auf c' ist natürlich die Beherrschung der entsprechenden Metasprache.

Operieren mit Paradigmen und Zeichen ermittelt werden, ohne dass hierbei die fraglichen Paradigmen auf die Wirklichkeit projiziert würden. Wie unmittelbar zu zeigen sein wird, führen die nun folgende Untersuchungen der Verifikation der analytischen Aussagen der Situationssprache zu einem ähnlichen Ergebnis.

Wie im Abschnitt zuvor erläutert wurde, sind analytischen Aussagen der Situationssprache komplex, also jeweils durch bestimmte Wahrheitsfunktionen gebildet. Die sukzessive Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage besteht darin, nacheinander ihre Argumente zu verifizieren und nach jeder solchen Verifikation zu überprüfen, ob alle der hiernach noch in Frage kommenden Wahrheitsmöglichkeiten entweder Wahrheitsgründe oder aber keine Wahrheitsgründe sind. Was hierbei überprüft wird, ist also, ob die jeweils entsprechend eingeschränkten Wahrheitsfunktionen konstant sind. Wird eine solche Prüfung jeweils auch schon vor der ersten Verifikation eines Arguments durchgeführt, so bricht das Verfahren der sukzessiven Verifikation bereits an dieser Stelle ab, falls die Wahrheitsfunktion konstant ist. So bricht etwa die sukzessive Verifikation der durch konstant wahre Wahrheitsfunktion ‚$p \vee \neg p$' gebildete Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' bereits vor der somit überflüssigen Verifikation des Arguments ‚Es regnet' ab. – Die Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' kann also ohne den für die Verifikation von ‚Es regnet' erforderlichen Blick aus dem Fenster verifiziert werden. – Ist eine Aussage durch eine konstante Wahrheitsfunktion gebildet, so ist für ihre Verifikation also nicht die Verifikation ihrer Argumente, sondern lediglich dieser erste Rechenschritt – also die Feststellung der Konstanz der Wahrheitsfunktion – konstitutiv ist.

Die kanonische Methode der Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage bestand darin, zunächst alle Argumente der Aussage zu verifizieren, um dann zu prüfen, ob die hierdurch identifizierte Wahrheitsmöglichkeit ein Wahrheitsgrund der Wahrheitsfunktion ist, durch welche die fragliche Aussage gebildet ist. Wie die Überlegungen zuvor zeigen, ist hierbei die Identifikation der vorliegenden Wahrheitsmöglichkeit durch die Verifikation der Argumente überflüssig, falls die Wahrheitsfunktion konstant ist, da es sich in diesem Fall bei der zu identifizierenden Wahrheitsmöglichkeit in jedem Fall um einen Wahrheitsgrund bzw. um keinen Wahrheitsgrund handeln. Daher ließe sich auch die Standardmethode der Verifikation wahrheitsfunktionaler Aussagen derart modifizieren, dass stets zunächst überprüft wird, ob die Wahrheitsfunktion, durch welche die zu verifizierende Aussage gebildet ist, konstant ist, und dass nur dann, wenn dies nicht der Fall ist, das zuvor beschriebene Verfahren der Identifikation und Prüfung der vorliegenden Wahrheitsmöglichkeit eingeleitet wird. Das bedeutet, dass auch die Standardmethode in natürlicher Weise derart strukturiert werden kann, dass für die Verifikation einer wahrheitsfunktionalen Aussage nur dann die Verifikation ihrer Argumente konstitutiv ist, wenn die fragliche Aussage nicht wahrheitsfunktional-analytisch ist. Und ebenso können die im

Abschnitt zuvor dargestellten Paradigmenvergleiche und die daraus resultierenden Eliminierungen von Wahrheitsmöglichkeiten etwaigen Argumentverifikationen vorhergehen. Wenn in diesem Sinn etwa im Rahmen der Verifikation von ‚Rot ∧ Grün' zunächst die Wahrheitsmöglichkeit, welche die Wahrheit der Situationsaussagen ‚Rot' und ‚Grün' vorsieht, eliminiert wird, kann aus der Konstanz der entsprechend reduzierten Wahrheitswerttabelle von ‚∧' bereits bevor der Verifikation der Argumente ‚Rot' und ‚Grün' die Falschheit von ‚Rot ∧ Grün' entnommen werden.

Sowohl die Prüfungen von Wahrheitsfunktionen auf ihre Konstanz als auch die Eliminierungen von Wahrheitsmöglichkeiten durch Paradigmenvergleiche können sich nun ihrerseits in grundsätzlich analoger Weise manifestieren wie zuvor die Verifikationen atomarer Alphabetaussagen. Eine Möglichkeit hierfür bestünde also wieder in einer entsprechenden metasprachlichen Argumentation. So könnte sich etwa die Verifikation von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' derart gestalten, dass diese Aussage geäußert bzw. eine solche Äußerung bejaht wird, in Anschluss an eine andere Äußerung, welche die Konstanz der Wahrheitsfunktion ‚p∨¬p' zum Ausdruck bringt, also etwa die Äußerung eines Satzes wie ‚„p∨¬p" ist wahr, wenn „p" wahr oder wenn „p" falsch ist' oder eben einfach ‚p∨¬p ist konstant'. Und ebenso könnte etwa die Äußerung von ‚Rot ∧ Grün' nach einem entsprechenden verbalen Hinweis auf die Farbverschiedenheit des Rot- und des Gründtäfelchens verneint werden. Eine zweite Möglichkeit bestünde wieder im geeigneten Umgang mit entsprechenden Paradigmen. In diesem Sinn könnte ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' nach einem Blick auf die Wahrheitswerttabelle von ‚p∨¬p' geäußert bzw. bejaht werden. Und ‚Rot ∧ Grün' könnte verneint werden, nachdem zunächst ein Blick auf das Rot- und das Grüntäfelchen geworfen und dann eventuell die entsprechende Zeile der Wahrheitswerttabelle der Konjunktion durchgestrichen wird. Eine dritte Möglichkeit bestünde schließlich wieder darin, dass einfach unmittelbar zur Äußerung von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' bzw. von einer solchen Äußerung zu deren Bejahung übergegangen wird. Die Erkenntnis, dass für die Verifikation dieser Aussage die Verifikation des einzigen Arguments ‚Es regnet' nicht erforderlich ist, würde sich in diesem Fall also nur darin manifestierten, dass dieses nicht verifiziert wird.

Wie die Betrachtungen der Alphabetliste im Fall der Alphabetaussagen so sind auch die Paradigmenbetrachtungen, welche eventuell einen Teil der Feststellungen der Konstanz von Wahrheitsfunktionen oder von Eliminierbarkeiten von Wahrheitsmöglichkeiten bilden, insofern nicht als Wirklichkeitsuntersuchungen zu verstehen, als die hierbei betrachten Paradigmen nicht auf die Wirklichkeit projiziert werden. Für die Feststellung der Konstanz einer Wahrheitsfunktion wird die letzte Spalte ihrer Wahrheitswerttabelle betrachtet. Und bei Vergleichen von Farb-, Form- oder Längenparadigmen, werden diese wieder nicht auf die Wirklichkeit, sondern nur wechselseitig aufeinander projiziert. Man könnte sagen, dass sie in diesem Fall ins Spracharchiv zurückgelegt werden, bevor sie auf die Wirklichkeit angewendet werden.

Die Untersuchungen dieser Beispiele legen somit die folgenden Verallgemeinerungen nahe. Genau dann, wenn die Wahrheitsbedingungen einer Aussage ihren Wahrheitswert implizieren, kann der Wahrheitswert durch die semantische Erkenntnis ermittelt werden, dass er von den Wahrheitsbedingungen impliziert wird. Im Vergleich zur Verifikation synthetischer Aussagen reduziert sich daher die Verifikation einer analytischen Aussage auf das Erkennen desjenigen Bedeutungsaspekts, der für die Analytizität der fraglichen Aussage verantwortlich ist. So reduziert sich etwa die Verifikation von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' um die etwa für die Verifikation von ‚Es regnet ∨ ¬ es schneit' konstitutiven Wetterbeobachtungen auf die Erkenntnis, dass die Wahrheitsfunktion ‚p ∨ ¬p' konstant ist. Und analog hierzu ist für einer Verifikation von ‚d folgt auf c' lediglich die semantische Erkenntnis konstitutiv, dass die beiden Teilausdrücke ‚d' und ‚c' unmittelbar hintereinander auf der Liste stehen, durch welche die Bedeutung des restlichen Ausdrucks ‚folgt auf' erklärt ist.

Abhängig davon, in welcher Weise die Wahrheitsbedingungen einer analytischen Aussage vermittelt wurden, kann sich die Erkenntnis des für ihre Analytizität verantwortlichen Bedeutungsaspekts in verschiedener Weise manifestieren. Etwa durch ein metasprachliches Argument, in welchem der Wahrheitswert aus den Bedeutungserklärungen der analytischen Aussage abgleitet wird; oder in einem Operieren mit den Teilausdrücken der Aussage und den Paradigmen, welche deren Bedeutung bestimmen; oder einfach dadurch, dass unmittelbar – also ohne vermittelnde Wirklichkeitsuntersuchungen – zur Äußerung der Aussage bzw. zur Bejahung oder Verneinung einer solchen Äußerung übergegangen wird. Im letzteren Fall kann das Erkennen des für die Analytizität verantwortlichen Bedeutungsaspekts als eine Art des *Besinnens* auf die Verwendungsweise der Aussage aufgefasst werden.

Nach Carnap können in Bezug auf die Verifikation einer Aussage ganz allgemein zwei Schritte unterschieden werden: eine *semantische Analyse*, welche bestimmt, welche Wirklichkeitsuntersuchungen hierfür eventuell erforderlich sind, sowie gegebenenfalls eben diese *Wirklichkeitsuntersuchungen* (vgl. 1954, S. 16). Und analytische Aussagen seien gegenüber synthetischen Aussagen dadurch charakterisiert, dass der zweite Schritt nicht erforderlich sei, weil in diesem Fall der Wahrheitswert bereits durch die semantische Analyse ermittelt werden könne. Wenn hierbei im Auge behalten wird, dass sich Carnaps Analyseschritt eventuell auch auf eine einfache Besinnung reduzieren kann, dann erscheint diese Charakterisierung des Unterschieds in der Verifikation analytischer und synthetischer Aussagen durchaus adäquat. Denn im Hinblick auf diesen Unterschied ließe sich mit Blick auf die Untersuchungen dieses Abschnitts das folgende, mit der Darstellung Carnaps übereinstimmende Bild zeichnen. Angenommen, dass ein Verzeichnis für die Verwendung aller relevanten Ausdrücke einer bestimmten Sprache vorläge, welches vor der Verifikation einer beliebigen Aussage dieser Sprache jeweils konsultiert werden könnte, um zu klären, was hierfür zu tun ist. Während nun im Fall einer darstellenden Aussage aus dem Verwendungsverzeichnis abgelesen werden würde, welcher Wirklichkeitsausschnitt zur Ermittlung deren Wahrheitswertes zu untersuchen ist, würde im Fall einer analytischen Aussagen deren Wahrheitswert selbst aus dem Verwendungsverzeichnis abgelesen werden. Man könnte also sagen, dass genau diejenigen Aussagen analytisch sind, deren Wahrheitswert allein durch einen Blick ins Verwendungsverzeichnis ermittelt werden kann.

2.3 Wie im Abschnitt zuvor erläutert wurde, kann die Prüfung einer Aussage daraufhin, ob sie analytisch oder synthetisch ist, unter Anderem in einer Untersuchung entsprechender Paradigmen bestehen. Was bei einer solchen Untersuchung ermittelt wird, ist die *momentane* Paradigmenbeschaffenheit, insofern hierbei etwa festgestellt wird, dass im Moment der Feststellung selbst ‚d' in der Alphabetliste unmittelbar hinter ‚c' steht, dass in der letzten Spalte dieser oder jener Wahrheitswerttafel nur Ws stehen, oder dass das Rot- und das Grüntäfelchen nicht farbgleich sind. Da auch Paradigmen Teile der Wirklichkeit und somit Veränderungen unterworfen sind, könnten Paradigmenuntersuchungen zu verschiedenen Zeitpunkten zu verschiedenen Ergebnissen führen. So könnte sich etwa das Rottäfelchen mit der Zeit derart verfärben, dass es gleichfarbig mit dem Gelbtäfelchen wird. Aus diesem Grund könnte man meinen, dass die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen *zeitabhängig* sei, insofern etwa ‚Rot ∧ Gelb' nur zu den Zeitpunkten kontradiktorisch wäre, an denen das Rot- und das Grüntäfelchen nicht gleichfarbig sind. Dass dies nicht der Fall, sollen die folgenden Überlegungen zeigen.

Da die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen durch Bezug auf deren Wahrheitsbedingungen definiert ist, können nur solche Paradigmenveränderungen zu Veränderungen entsprechender Aussagen in Bezug auf die Unterscheidung analytisch/synthetisch führen, welche gleichzeitig zu einer Veränderung der Wahrheitsbedingungen – und also der Bedeutung – der fraglichen Aussagen führen. Wenn also etwa das Rot- und das Gelbtäfelchen so weit ihre Farbe ändern, dass sie gleichfarbig werden und damit ‚Rot ∧ Gelb' als synthetisch bestimmen, dann verändert sich damit auch die Bedeutung zumindest einer der beiden entsprechenden Farbterme ‚rot' bzw. ‚gelb'. Und umgekehrt bleibt ‚Rot ∧ Gelb' solange analytisch (bzw. kontradiktorisch), wie sich das Rot- und das Gelbtäfelchen nur in semantisch irrelevanter Hinsicht – also etwa hinsichtlich ihrer Form oder ihrer Größe – verändern. Wenn nun tatsächlich eine semantisch relevante Veränderung der Paradigmen festgestellt würde, dann könnte hierauf also in zweierlei Weise reagiert werden: Entweder die alten Paradigmen werden für unbrauchbar erklärt und durch andere Paradigmen ersetzt, welche dieselben Wahrheitsbedingungen und damit dieselben Aussagen als analytisch bzw. synthetisch bestimmen wie zuvor. In diesem Sinn könnte nach der Feststellung der Gleichfarbigkeit von Rot- und Gelbtäfelchen die alte semantische Ordnung dadurch wieder hergestellt werden, dass beide durch Farbmuster ersetzt werden, welche dieselbe Farbe wie das alte Rot- und das alte Gelbtäfelchen zum Zeitpunkt ihrer Einführung hatten. Oder aber es wird an den alten Paradigmen festgehalten und dementsprechend in anderer Weise zwischen analytischen und synthetischen Aussagen unterschieden. In diesem Fall müsste jedoch auch eine Veränderung in der Bedeutung der fraglichen Aussagen zugestanden werden. Dass das Rot- und das Gelbtäfelchen zu einem bestimmten Zeitpunkt ‚Rot ∧ Gelb' als kontradiktorisch bestimmen würden, ist also ein Kriterium dafür, dass ‚Rot' und ‚Gelb' noch immer dasselbe bedeuten bzw. dafür, dass sich Rot- und Gelbtäfelchen weiterhin als Paradigmen für ‚rot' und ‚gelb' eignen.

Nun zurück zur Frage nach der Zeitlichkeit der Unterscheidung analytischer und synthetischer Aussagen! Es handelt sich hierbei zwar um eine Unterscheidung zwischen Ausdrücken, jedoch werden diese hierbei nicht nach ihrer Form, sondern nach ihrer Verwendung und also ihren Wahrheitsbedingungen unterschieden. Ohne bzw. unabhängig von Wahrheitsbedingungen kann die Unterscheidung analytisch/synthetisch daher nicht getroffen werden. Und bei gegebenen Wahrheitsbedingungen ist die Unterscheidung analytisch/synthetisch in dem Sinn zeitlos, dass der Zusammenhang zwischen Wahrheitsbedingungen und der Unterscheidung nicht zeitabhängig ist. Aber dies nicht deshalb, weil Paradigmen prinzipiell unveränderlich sind, sondern weil eine für die Unterscheidung analytisch/synthetisch relevante Veränderung stets auch eine semantisch relevante Veränderung – also eine Veränderung der Wahrheitsbedingungen – wäre.

Es ist nun zu bemerken, dass man sich bei der Angabe von Wahrheitsbedingungen im Unklaren darüber sein mag, ob die Aussagen, deren Wahrheitsbedingungen angegeben werden, analytisch oder synthetisch sind. Auch wenn etwa die Bedeutungserklärungen von ‚gelb', ‚rot', ‚¬' und ‚∧' bereits formuliert wurden, kann der Umstand, dass damit ‚¬(Rot ∧Gelb) ' analytisch (wahr) ist, vor einer entsprechenden Prüfung unbekannt sein. Aber aufgrund der Zeitlosigkeit des Zusammenhangs zwischen Wahrheitsbedingungen und der Unterscheidung analytisch/synthetisch können die Ergebnisse entsprechender Prüfungen, also die Erkenntnisse, dass bestimmte Aussagen analytisch bzw. synthetisch sind, ein für alle Mal im Verwendungsverzeichnis – also gemeinsam mit den Wahrheitsbedingungen der fraglichen Aussagen – festgehalten werden. So könnte dem Verwendungsverzeichnis der Situationssprache etwa ein Tautologiekapitel hinzugefügt werden, in dem dann z.B. die Erkenntnis verzeichnet wird, dass ‚¬(Rot ∧Gelb)' tautologisch ist. Bevor im nächsten Abschnitt untersucht werden soll, welcher Gebrauch von Einträgen dieser Art gemacht werden kann, soll in diesem Abschnitt zunächst dargestellt werden, in welcher *Form* Aussagen in einem Tautologie- bzw. Kontradiktionskapitel verzeichnet werden können.

Es wurde zuvor bereits darauf hingewiesen, dass die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen nicht rein formaler, sondern semantischer Art ist. Denn ob eine Aussage analytisch oder synthetisch ist, hängt nicht nur von ihrer Form, sondern auch von ihrer Verwendung – bzw. der Verwendung ihrer Teilausdrücke – ab. So kann, dass ‚¬ (Es regnet ∧ ¬ es regnet)' kontradiktorisch ist, nicht allein auf darauf zurückgeführt, dass die Ausdrücke ‚Es regnet', ‚∧' und ‚¬' hierin in bestimmter Reihenfolge vorkommen, weil ‚¬(Es regnet ∧ ¬ es regnet)' z.B. dann nicht tautologisch wäre, wenn ‚¬' derart verwendet werden würde, dass ‚¬p' genau dann wahr bei (s,t) ist, wenn ‚p' wahr bei (s,t) ist. Wenn andererseits die Ausdrücke ‚¬' und ‚∧' in der üblichen Weise erklärt sind, dann kann aus diesen Erklärungen abgleitet werden, dass eine Aussage von der Form ‚¬(p∧¬p)' kontradiktorisch ist. Obwohl also die Analytizität von Aussagen ein semantisches Merkmal ist, lassen sich aus der Semantik – also aus den Bedeutungserklärungen – von Aussagen *formale Kriterien* für die Analytizität der derart erklärten Aussagen ableiten. So lässt sich der Semantik der Wahrheitsfunktionen entnehmen, dass das formale Merkmal, eine Einsetzungsinstanz von ‚¬(p∧¬p)' zu sein, eine hinreichende Analytizitätsbedingung ist.

Es besteht also die Möglichkeit, ein eventuelles Tautologiekapitel (oder natürlich auch ein Kontradiktionskapitel) derart zu gestalten, dass dort anstelle einzelner Tautologiesätze der Art ‚„Es regnet ∨ ¬ es regnet" ist tautologisch' formale Kriterien derart angegeben werden, dass Aussagen, welche diesen Kriterien genügen, auch das semantische Merkmal aufweisen, tautologisch zu sein. In diesem Sinn könnten hierin also etwa Angaben in der Art von ‚Einsetzungsinstanzen von „p∨¬p" sind tautologisch' gemacht werden. Die Prüfung einer gegebenen Aussage daraufhin, ob sie im Tautologiekapitel verzeichnet ist, bestünde in diesem Fall darin, dass festgestellt wird, ob sie den dort angegebenen formalen Kriterien genügt.

Natürlich müssen die hierbei verwendeten formalen Kriterien in dem Sinn *semantisch korrekt* sein, dass daraus, dass eine Aussage einem solchen formalen Kriterium genügt, folgt, dass sie auch das fragliche semantische Merkmal aufweist. Die in diesem Sinn verstandene Korrektheit eines formalen Kriteriums ist dabei jeweils durch die Angabe einer Regel dafür zu zeigen, wie sich aus einem Beweis dafür, dass eine Aussage dem formalen Kriterium genügt ein Beweis dafür abgeleitet werden kann, dass sie das semantische Merkmal aufweist.

Für die Zwecke dieser Arbeit können grob drei verschiedene Arten formaler Kriterien unterschieden werden. Kriterien der ersten Art bestehen im Vorkommen in einer bestimmten *Liste*. So könnte im Tautologieverzeichnis etwa folgender Vermerk eingetragen werden:

> Die folgende Aussagen sind tautologisch: ‚Rot ∨ ¬ Rot', ‚Gelb ∨ ¬ Gelb', ‚Grün ∨ ¬Grün)'.

Die Prüfung, ob eine Aussage einem Kriterium dieser Art genügt – also die Prüfung, ob die fragliche Aussagen auf einer bestimmten Liste steht –, stellt sich in dem Fall, dass auch die zu prüfende Aussage selbst in schriftlicher Form gegeben ist, als eine Art *Gestaltvergleich* von schriftlichen Ausdrucksvorkommnissen dar. Hierbei wird die fragliche Liste konsultiert, um daraufhin festzustellen, ob sich hierauf ein Ausdrucksvorkommnis findet, welches dieselbe Gestalt wie das gegeben das prüfende Ausdrucksvorkommnis hat. Dass ein solches Listenkriterium korrekt ist, bedeutet, dass alle aufgelisteten Aussagen das fragliche semantische Merkmal aufweisen. Dieser Umstand kann dadurch gezeigt werden, dass eine Liste entsprechender Beweise angegeben wird. So könnte etwa für jede Aussage der soeben dargestellten Liste ein Argument analog zu dem in Abschnitt 2.1 dargestellten Argument für die Tautologizität von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' formuliert und in einer entsprechenden Liste zusammengefasst werden.

Eine zweite Art formaler Kriterien stellen die schon angesprochenen *Einsetzungsschemata* dar. In diesem Sinn könnte etwa der folgende Eintrag im Tautologiekapitel verzeichnet werden:

> Jede Aussage, welche durch Einsetzung einer Aussage in das Schema ‚p∨¬p' resultiert, ist tautologisch.

Ähnlich wie im Fall von Listen, wird, ob eine (schriftlich) gegebene Aussage einem Einsetzungsschema genügt, durch einen Gestaltvergleich der gegebenen Aussage mit einem Teilausdruck der Formulierung des Kriteriums – nämlich dem fraglichen Schema – festgestellt. So wird etwa, dass ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' eine Einsetzungsinstanz von ‚p∨¬p' ist, dadurch festgestellt, dass diese beiden Ausdrucksvorkommnisse im Hinblick auf ihre Form – also ihre visuelle Gestalt – hin miteinander vergleichen werden. Auch im Fall schematischer Kriterien werden also Ausdrucksvorkommnisse daraufhin geprüft, ob sie in einer bestimmten Gestaltbeziehung zueinander stehen, nur dass es sich in diesem Fall nicht, wie zuvor, um die einfache Beziehung der Gestaltidentität, sondern um die etwas kompliziertere Substitutionsbeziehung handelt. Dass daraus, eine Instanz eines bestimmten Schemas zu sein, das

Aufweisen eines gewissen semantischen Merkmals folgt, wird jeweils durch die Angabe eines Beweisschemas gezeigt, dessen Instanzen die entsprechenden individuellen Beweise für das Aufweisen des fraglichen semantischen Merkmals darstellen. In diesem Sinn stellt etwa der in Abschnitt 2.1 gegebene schematische Beweis dafür, dass Instanzen von ‚$p \vee \neg p$' tautologisch sind, einen Korrektheitsbeweis des entsprechenden formalen Tautologiekriteriums dar.

Eine dritte Art formaler Kriterien besteht in der *Konstruierbarkeit* nach bestimmten formalen *Operationen*. So könnte etwa man zunächst die Operation O derart definieren, dass das Resultat ihrer Anwendung auf eine Wahrheitsfunktion $T(p_1,...,p_n)$ in der Wahrheitsfunktion $T(p_1,...,p_n) \wedge \neg(p_{n+1} \wedge \neg p_{n+1})$ bestehe, um auf dieser Grundlage das folgende Konstruierbarkeitskriterium im Tautologiekapitel festzuhalten:

> Eine Aussage ist tautologisch, falls sie eine Einsetzungsinstanz entweder des Schemas $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ oder eines aus diesem Schema durch sukzessive Anwendung der Operation O resultierenden Schemas ist.

Ob eine Aussage diesem Kriterium genügt, wäre dementsprechend dadurch festzustellen, dass durch die iterierte Anwendung von O auf $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ Schemata konstruiert und daraufhin überprüft werden, ob sie die zu prüfende Aussage schematisieren. Und die Korrektheit dieses Kriteriums würde durch die Angabe zweier Beweise gezeigt. Zum einen wäre zu zeigen, dass Instanzen von $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ tautologisch sind, was wieder in der in *1.1* dargestellten Weise geschehen kann. Zum anderen wäre zu zeigen, dass daraus, dass eine Wahrheitsfunktion $T(p_1,...,p_n)$ tautologisch ist, folgt, dass die hieraus durch Anwendung von O resultierenden Wahrheitsfunktion $T(p_1,...,p_n) \wedge \neg(p_{n+1} \wedge \neg p_{n+1})$ tautologisch ist. Dies könnte etwa dadurch geschehen, dass gezeigt wird, dass die Konjunktion zweier Tautologien stets selbst tautologisch ist.

Prinzipiell analog zu den soeben diskutierten operationalen Kriterien ist auch das in 2.1 genannte Kriterium zu verstehen, wonach eine Wahrheitsfunktion tautologisch ist, falls in der letzten Spalte der durch sie bestimmten Wahrheitswerttafel nur Ws stehen. Denn insofern die Prüfung einer Wahrheitsfunktion darauf, ob sie diesem Kriterium genügt, in der Betrachtung der letzten Spalte der hierfür typischerweise erst zu konstruierenden Wahrheitswerttafel besteht, sind auch für Prüfungen dieser Art vielfach sukzessive Konstruktionen bestimmter Ausdrücke – in diesem Fall der Einträge der letzten Spalte der entsprechenden Wahrheitswerttafeln – wesentlich. Im Unterschied zu den operationalen Kriterien der zuvor geschilderten Art bezieht sich das soeben genannte Kriterium jedoch nicht auf den zu prüfenden Ausdruck – also die

Wahrheitsfunktion – selbst, sondern auf einen anderen Ausdruck – die Wahrheitswerttafel –, dessen Bildung durch die Wahrheitsfunktion bestimmt ist.

Nun ist es offenbar möglich, metasprachliche Aussagen, welche bestimmten Ausdrücken der Objektsprache gewisse formale Eigenschaften zuschreiben, auch in die Objektsprache einzuführen, indem die formalen Kriterien zu den Wahrheitsbedingungen dieser Aussagen gemacht werden. So könnte etwa ein eigenes Verwendungsverzeichnis – oder zumindest ein eigenes Kapitel innerhalb eines umfassenderen Verwendungsverzeichnisses – für die Aussagen angelegt werden, welche die Konstanz von Wahrheitsfunktionen behaupten. Hierbei würde dann die grundlegende Wahrheitsbedingungsangabe bestimmen, dass eine Aussage der Form „'T' ist konstant' genau wahr ist, wenn ‚T' das Konstanzkriterium erfüllt; also dann, wenn in der letzten Spalte der Wahrheitswerttafel von T entweder nur Ws oder nur Fs stehen. Und die zuvor beschrieben Konstanzprüfungen – also die Konstruktion der Wahrheitswerttafel mit anschließender Betrachtung ihrer letzten Spalte – stellen die Verifikationen dieser Aussage dar.

Wenn nun ein Zusammenhang zwischen bestimmten formalen Kriterien und gewissen semantischen Merkmalen – wie etwa der Zusammenhang zwischen Konstanz einer Wahrheitsfunktion und der Analytizität durch sie gebildeter Aussagen – besteht, dann können Ausdrücke, welche die semantische Merkmale aufweisen, nicht nur durch Bezug auf die (in der Metasprache formulierten) formalen Kriterien charakterisiert werden, sondern auch durch Bezug auf die Wahrheitswerte entsprechender formaler Aussagen der Objektsprache. Anstatt also im Tautologiekapitel den Satz ‚Eine durch eine Wahrheitsfunktion T gebildete Aussage ist tautologisch, falls T konstant ist' einzutragen, könnte dort statt dessen die folgende Formulierung benutzt werden:

> Eine durch eine Wahrheitsfunktion T gebildete Aussage ist tautologisch, falls die Aussage ‚T ist konstant' wahr ist.

Bei dieser alternativen Ordnung des Verwendungsverzeichnisses verwiesen also die Einträge im Tautologiekapitel auf das – oder die – Kapitel, in dem die Wahrheitsbedingungen der den Einträgen entsprechenden formalen Aussagen – und damit die Methoden der Prüfung von Aussagen daraufhin, ob sie tautologisch sind – dargestellt sind. Natürlich könnte dabei für verschiedene Tautologiearten auf verschiedene Arten formaler Aussagen und damit jeweils auf verschieden Kapitel verwiesen werden. Wie in Kapitel 9 dieser Arbeit gezeigt werden soll, könnte man in dieser Weise insbesondere im Tautologiekapitel für Aussagen über die Anzahlen materieller Gegenstände auf das Kapitel für die Verwendung arithmetischer Aussagen verweisen.

Denn wie in Abschnitt 9.2 zu erläutern sein wird, ist die Wahrheit einer arithmetischen Gleichung äquivalent dazu, dass Zahlaussagen einer der Gleichung entsprechenden Form tautologisch sind.

2.4 Wenn eine Aussage immer und überall wahr ist, muss eine *fehlerfreie* Verifikation stets ihre Wahrheit ergeben. Und analog hierzu muss die Verifikation einer immer und überall falschen Aussage stets deren Falschheit ergeben. Ist eine Aussage tautologisch, so bestimmen also ihre Wahrheitsbedingungen, dass eine fehlerfreie Verifikation stets nur ihre Wahrheit ergeben kann; ist sie kontradiktorisch, so bestimmen ihre Wahrheitsbedingungen, dass eine fehlerfreie Verifikation nur ihre Falschheit ergeben kann. Während es also die Wahrheitsbedingungen einer synthetischen Aussage – wie etwa ‚Es regnet ∨ es schneit' – der Wirklichkeitsbeschaffenheit überlassen, zu welchen Wahrheitswert deren Verifikation an einer bestimmten Raumzeitstelle führt, bestimmen etwa die Wahrheitsbedingungen der tautologischen Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet', dass einen Fehler begangen haben muss, wer – wann und wo auch immer – bei einem entsprechenden Verifikationsversuch nicht deren Wahrheit feststellt.

Auf der Grundlage dieses Zusammenhangs zwischen dem tautologischen bzw. kontradiktorischen Charakter von Aussagen einerseits und deren Verifikationsergebnissen andererseits soll in diesem Abschnitt untersucht werden, welche Konsequenzen sich aus dem tautologischen bzw. kontradiktorischen Charakter von Aussagen für deren Verwendung in Aussagespielen sowie für das Verstehen ihrer Bedeutung ergeben. Dabei verweisen die hierbei ermittelten Konsequenzen jeweils auf Möglichkeiten dafür, in welcher Weise die eventuell im Verwendungsverzeichnis festgehaltene Erkenntnis, dass eine Aussage tautologisch bzw. kontradiktorisch ist, benutzt werden kann.

Eine Aussage zu *entscheiden*, hieß, eine Äußerung der Aussage in Anschluss an ihre Verifikation durch ein Bejahen bzw. ein Verneinen zu bewerten. So kann sich die Entscheidung der Aussage ‚Es regnet' derart gestalten, dass ‚Es regnet' zunächst geäußert und dann unmittelbar durch eine Blick aus dem Fenster verifiziert wird. Wird dabei Regen beobachtet – und also die Wahrheit der Aussage festgestellt –, wird ‚Ja', anderenfalls ‚Nein' geäußert. Nun bestimmen die Wahrheitsbedingungen einer tautologischen Aussage, dass diese an jeder Raumzeitstelle wahr und folglich immer und überall zu bejahen ist. Und analog hierzu bestimmen die Wahrheitsbedingungen einer kontradiktorischen Aussage, dass diese an jeder Raumzeitstelle falsch und demnach immer und überall zu verneinen ist. Wenn nun bekannt ist, dass eine Aussage tautologisch bzw. kontradiktorisch ist, dann kann also allein aus der Äußerung der Aussage und deren irriger Bewertung darauf geschlossen werden, dass der jeweilige Sprecher einen Fehler im dazwischen liegenden Verifikationsschritt begangen hat. Das heißt: Wenn jemand eine Äußerung etwa der tautologischen Aussage ‚¬ (Es regnet ∧ ¬ es regnet)' nach deren (versuchter) Verifikation verneint, dann kann auf die Fehlerhaftigkeit des Verifikationsschritts auch ohne dessen Beobachtung geschlossen werden. Denn was auch immer dabei getan wurde: es war nicht das Feststellen der Falschheit von ‚¬ (Es regnet ∧ ¬ es regnet)'. Die Einträge eines eventuellen Tautologie- bzw. Kontradiktionskapitels könnten also als Kriterien für die Identifikation von Verifikationsfehlern im Rahmen des Entscheidungsspiels benutzt werden, da aus fehlerfreien Verifikationen keine Verneinungen von Tautologien oder Bejahungen von Kontradiktionen resultieren können.

Gemäß der entsprechenden Definition aus dem ersten Kapitel besteht das *Erzeugen* einer Aussage darin, sie in Folge der Feststellung ihrer Wahrheit zu äußern. Da somit also die Feststellung der Wahrheit einer Aussage für ihre Erzeugung konstitutiv ist, kann eine Aussage, wann immer sie falsch ist, nicht erzeugt werden. Während nun die Wahrheitsbedingungen einer tautologischen Aussage bestimmen, dass diese immer und überall erzeugt werden kann, bestimmen die Wahrheitsbedingungen einer kontradiktorischen Aussage, dass sie niemals erzeugt werden kann. Wenn bekannt ist, dass eine Aussage kontradiktorisch ist, kann also daraus, dass sie nach (versuchter) Verifikation geäußert wird, auch ohne die Beobachtung des Verifikationsvorgangs – d.h. also allein auf der Grundlage der Äußerung selbst – auf dessen Fehlerhaftigkeit geschlossen werden. Einträge eines eventuellen Kontradiktionskapitels können also auch in Bezug auf die Erzeugung von Aussagen als Kriterien für Verifikationsfehler verwendet werden. Da Kontradiktionen also per Definition nicht erzeugt werden können, kann die Erkenntnis, dass eine Aussage kontradiktorisch ist, ferner dazu verwendet werden, sie aus dem Erzeugungsspiel auszuschließen. In diesem Sinn kann ein Kontradiktionskapitel also als eine Art Erzeugungsindex verwendet werden: steht eine Aussage darin, so ist ihre Äußerung im Rahmen des Erzeugungsspiels untersagt.

Das *Mitteilen* einer Aussage wurde im ersten Kapitel dieser Arbeit als das auf einen bestimmten Adressaten bezogene Erzeugen bzw. Entscheiden der Aussage expliziert. Dass ein Sprecher einem Adressaten eine Aussage ‚p' mitteilt, soll also bedeuten, dass der Sprecher ‚p' gegenüber dem Adressaten äußert, nachdem er, der Sprecher, festgestellt hat, dass ‚p' wahr ist. Aus dieser Mitteilung kann der Adressat dann – auch ohne ‚p' selbst zu verifizieren – die praktischen Konsequenzen ziehen, die er bei eigener Feststellung der Wahrheit von ‚p' ziehen würde. So kann sich etwa die Regenmitteilung und die entsprechende praktische Reaktion des Adressaten derart gestalten, dass der Sprecher, nachdem er durch einen Blick aus dem Fenster das Regenwetter festgestellt hat, ‚Es regnet' äußert, woraufhin dann der Adressat zum Regenschirm greift, ohne vorher selbst aus dem Fenster zu schauen. Die Zweckmäßigkeit einer Mitteilung setzt natürlich voraus, dass der Adressat die Wahrheit dessen, was mitgeteilt wird, nicht selbst bereits festgestellt hat. Und der Witz des Mitteilungsspiels besteht dann darin, dem Adressaten diese Verifikation durch die entsprechende Mitteilung zu ersparen.

Ist eine Aussage kontradiktorisch, so bestimmen ihre Wahrheitsbedingungen, dass sie an jeder Raumzeitstelle falsch und damit niemals mitteilbar ist. Ebenso wie die Rede vom Erzeugen einer Kontradiktion ist auch die Rede vom Mitteilen einer Kontradiktion selbst kontradiktorisch. Daher kann die Erkenntnis, dass eine Aussage kontradiktorisch ist, dazu benutzt werden, die fragliche Aussage aus dem Mitteilungsverkehr auszuschließen. Steht eine Aussage im Kontradiktionskapitel, so ist ihre Äußerung weder ein Zug der Erzeugungsspiels, noch Einer des Mitteilungsspiels. Dagegen ist eine tautologische Aussage wie etwa ‚Es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' an jeder Raumzeitstelle wahr und somit immer und überall mitteilbar. Allerdings teilt eine Tautologie nichts mit, was sich nicht allein dem Verwendungsverzeichnis entnehmen ließe; sie teilt also insbesondere nichts mit, was die Wirklichkeitsbeschaffenheit betrifft. Aus diesem Grund erspart die Mitteilung einer Tautologie dem Adressaten auch keinerlei Wirklichkeitsuntersuchungen. So erspart etwa die Äußerung von ‚Es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' dem Adressaten nicht den Blick aus dem Fenster, weil auch der Sprecher nicht aus dem Fenster schauen muss, um die Wahrheit dieser Aussage festzustellen.

Nun könnte man mit gewissem Recht sagen, dass der eigentliche Witz darstellender Sprachen darin bestehe, dass durch die Äußerungen ihrer Aussagen die Wirklichkeit beschrieben werden kann. Wenn eine solche Aussage als Mitteilung verwendet wird, kann also davon ausgegangen werden, dass der Sprecher die Absicht hat, dem Adressaten etwas mitzuteilen, dass sich nur durch bestimmte Wirklichkeitsbeobachtungen feststellen lässt, um ihm also durch die Mitteilung eben diese Beobachtung zu ersparen. In diesem Sinn sind Mitteilungen tautologischer Aussagen der Situations- oder Raumsprache keine echten, also keine Beobachtungen ersparenden Mitteilungen. Werden sie doch mitgeteilt, ist die Vermutung berechtigt, es handle sich um einen verunglückten Versuch, etwas Synthetisches mitzuteilen. Ebenso wie kontradiktorische Mitteilungen gehen also auch tautologische Mitteilungen zurück an den Absender. Und wenn man das Mitteilen in diesem engen Sinn eines Mitteilens über die Wirklichkeitsbeschaffenheit versteht, dann müsste man also nicht nur Kontradiktionen, sondern auch Tautologien vom Mitteilungsverkehr ausschließen. Es ist daher möglich, die Unterscheidung analytisch/synthetisch in Bezug auf Sprachen, welche, anders als die Alphabetsprache, die Bildung von Aussagen beider Art erlauben, als eine strengere Art der Wohlgeformtheit aufzufassen. Denn im Rahmen darstellender Sprachen können analytische Aussagen insofern als ‚nicht wohlgeformt' gelten, als sie nicht die Wirklichkeit darstellen und also nichts über sie mitteilen.

Es ist in diesem Zusammenhang zu beachten, dass Tautologien und Kontradiktionen, obwohl sie in dem soeben erläuterten Sinn nichtssagend sind, dennoch eine Bedeutung haben.

Tautologien und Kontradiktion sind also von einem Ausdruck wie z.B. ‚4 ist rot' zu unterscheiden, welcher zwar die schulgrammatische Form eines Aussagesatzes hat, jedoch in keinerlei Aussagespiel verwendet werden kann, da die Bedeutungserklärungen seiner Teilausdrücke keine Verifikationsmethode für den gesamten Ausdruck bestimmen. So könnte man, nach der Verifikation von ‚4 ist rot' gefragt, zwar, wie es der Ausdruck Teilausdruck ‚rot' verlangt, zum Rottäfelchen greifen; jedoch wüsste man nicht, mit welchem Gegenstand man das Täfelchen vergleichen sollte, da der restliche Teilausdruck keinen solchen Gegenstand bestimmt. Im Gegensatz hierzu ist die Verifikationsmethode einer Kontradiktion wie z.B. ‚Rot ∧ Gelb' durch die Erklärungen ihrer Teilausdrücke durchaus bestimmt. Im Fall von ‚Rot ∧ Gelb' wäre hierfür durch den Farbvergleich des jeweils gegebenen Untersuchungsgegenstands mit dem Rot- und dem Gelbtäfelchen die entsprechende Zeile in der ‚∧' zugeordneten Wahrheitswerttafel zu ermitteln und der Wert in deren letzter Spalte abzulesen. Es ist in diesem Fall nur so, dass das Ergebnis der Anwendung dieser Verifikationsmethode unabhängig von der Beschaffenheit des Untersuchungsgegenstands feststeht, da die Farbverschiedenheit des Rot- und des Gelbtäfelchens die Ermittlung der einzigen Zeile ausschließt, in deren letzter Spalte ein W steht. Aus diesem Grund kann ‚Rot ∧ Gelb' zwar nicht im Rahmen des Erzeugungs- oder des Mitteilungsspiels verwendet werden. Doch da eine Verifikationsmethode bestimmt und damit ein Entscheiden möglich ist, handelt es sich bei ‚Rot ∧ Gelb' dennoch um eine Aussage in dem im ersten Kapitel bestimmten Sinn. Der soeben geschilderte Unterschied zwischen Tautologien und Kontradiktionen einerseits und Ausdrücken, die zwar im schulgrammatischen, nicht jedoch im semantischen Sinn Aussagen sind, andererseits entspricht zwar in gewissem Masse Wittgensteins Unterscheidung zwischen sinnlosen und unsinnigen Sätze in LPA. Es ist jedoch, wie gesagt, zu beachten, dass zumindest in der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie auch von analytischen Aussagen gesagt werden kann, dass sie eine Bedeutung haben und also sinnvoll sind.

Wie zuvor erläutert wurde, kann auch dann auf die Fehlerhaftigkeit der Verifikation einer tautologischen Aussage geschlossen werden, wenn der fragliche Verifikationsvorgang zwar nicht selbst beobachtet wurde, jedoch bekannt ist, dass er die vermeintliche Falschheit der Aussage ergab. Und analog hierzu kann auf die Fehlerhaftigkeit der Verifikation einer bekanntermaßen kontradiktorischen Aussage geschlossen werden, welche deren Wahrheit ergab. Nun manifestiert sich das Verstehen der Bedeutung einer Aussage wesentlich in ihrer fehlerfreien Erzeugung bzw. Entscheidung. Da für Fehlerfreiheit der Erzeugung bzw. Entscheidung einer Aussagen, natürlich die Fehlerfreiheit des jeweiligen Verifikationsschritts wesentlich ist, zeigen die zuvor angestellten Überlegungen, dass die Erkenntnis, dass eine Aussage tautologisch bzw. kontradiktorisch ist, auch als Kriterium für ein mangelndes *Verstehen* der Bedeutung der Aussage benutzt werden kann. Denn wer eine kontradiktorische Aussage in Anschluss an ihre Verifikation äußert bzw.

bejaht, manifestiert dadurch, dass er deren Bedeutung nicht versteht. Und ebenso manifestiert jemand dadurch, dass er eine tautologische Aussage in Folge ihrer Verifikation verneint, dass er die Bedeutung dieser Aussage nicht versteht.

Diese letzte Überlegung zeigt nun insbesondere, dass sich die in Abschnitt 2.1 durch Bezug auf Bedeutungserklärungen explizierten Ausdrücke ‚tautologisch' und ‚kontradiktorisch' in äquivalenter Weise auch durch Bezug auf die Rede vom Verstehen der Bedeutung definieren lassen. Denn dass eine Aussage ‚p' tautologisch ist, ist äquivalent dazu, dass die Wahrheitsbedingungen von ‚p' bestimmen, dass sich bereits im Vorgeben, die Falschheit von ‚p' festgestellt zu haben, die Unkenntnis der Wahrheitsbedingungen von ‚p' – und damit, dass Unverständnis der Bedeutung von ‚p' – manifestiert. Genau dann, wenn ‚p' tautologisch ist, manifestiert sich das Unverständnis der Bedeutung von ‚p' bereits darin, dass in Folge der Verifikation von ‚p' eine Äußerung von ‚p' verneint bzw. die Aussage ‚¬p' geäußert wird.

Bis auf zwei gleich zu diskutierende Abweichungen entspricht diese Bestimmung Glocks Definition von ‚tautologisch'[7], der gemäß eine Aussage ‚p' genau dann tautologisch ist, wenn jemand der ‚p' aufrichtig bestreitet, entweder die Bedeutung von ‚p' nicht versteht, oder aber ‚p' bewusst in einem neuen Sinn verwendet (vgl. 2003, S. 83). Der erste Unterschied zur zuvor gegebenen Bestimmung von ‚tautologisch' besteht im Verweis auf die Möglichkeit, ‚p' bewusst in anderer Bedeutung zu gebrauchen. Auf diese Zusatzklausel kann jedoch verzichtet werden, wenn angenommen wird, dass der fragliche Sprecher nicht beabsichtigt, ‚p' in abweichender Weise zu verwenden. Der zweite Unterschied besteht darin, dass in Glocks Definition anstatt vom Vorgeben, die Falschheit von ‚p' festgestellt zu haben – worunter, wie zuvor erläutert, das Verneinen von ‚p' bzw. das Äußern von ‚¬p' in Folge einer Verifikation von ‚p' zu verstehen ist – vom *Bestreiten* von ‚p' die Rede ist. Hierunter kann nun nicht nur das Äußern von ‚¬p' bzw. das Verneinen einer Äußerung von ‚p' im Anschluss an eine Verifikation von ‚p' verstanden werden, sondern auch das bloße Äußern von ‚¬p' bzw. das bloße Verneinen jemandes Äußerung von ‚p' vor oder unabhängig von einer eventuellen Verifikation von ‚p'. Dass Glock tatsächlich diese Deutung von ‚bestreiten' im Sinn hat, wird daraus deutlich, dass er ausdrücklich darauf hinweist, dass seine Definition von ‚tautologisch' die Folge hätte, dass nur *triviale* Aussagen als tautologisch gelten könnten. Demnach wäre eine Aussage, deren Wahrheit zwar allein durch ihre Wahrheitsbedingungen bestimmt ist, deren Verifikation jedoch *echter* Überlegung bedarf, deshalb nicht tautologisch, weil in diesem Fall offenbar nicht unmittelbar von der Äußerung ihrer Negation auf ihre Unverständnis geschlossen werden kann.

[7] Glock verwendet den Ausdruck ‚analytisch' anstelle des Ausdrucks ‚tautologisch'.

Nun erscheint jedoch die Auffassung, dass sich jemand bereits allein aufgrund des Äußerns von ‚¬p' semantisch disqualifiziert, auch dann, wenn ‚p' trivial ist, über Gebühr streng. Unter normalen Umständen, so scheint es, würde jemandem, der etwa die kontradiktorische Aussage ‚¬(Es regnet ∨ ¬ es regnet)' zwar zunächst äußert, diese Äußerung jedoch nach kurzer Besinnung revidiert – und hierfür eventuell gar auf die Wahrheitswerttafel von $\neg(p \vee \neg p)$ verweist – nicht das Verstehen der Bedeutung dieser Aussage – bzw. der entsprechenden Tautologie – abgesprochen werden. Es scheint also, dass auch im Fall trivialer Aussagen an dem im ersten Kapitel dieser Arbeit erarbeiteten Grundsatz festgehalten werden kann, wonach sich sowohl das Verstehen als auch das Missverstehen der Bedeutung einer Aussage nicht allein im Äußern der Aussage manifestiert, sondern erst in der Kombination aus ihrer Äußerung und ihrer Verifikation, also im Erzeugen oder Entscheiden der Aussage. Aus diesem Grund kann an Glocks Formulierung nur dann festgehalten werden, wenn man die Rede vom Bestreiten einer Aussage lediglich im engen Sinn, also als im Sinn eines Bestreitens *in Folge ihrer Verifikation* versteht.[8]

Andererseits könnte auch dieses Kriterium für das Unverständnis tautologischer Aussagen – also das Kriterium des Bestreitens eine solchen Aussage in Folge ihrer Verifikation – gerade mit Blick auf nicht triviale tautologischen Aussagen noch etwas weiter gelockert werden. Denn angenommen, eine Aussage sei durch eine komplexe tautologische Wahrheitsfunktion gebildet ist, so dass ihre Verifikation – anders etwa als die Verifikation von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' – einer echten Überlegung bedarf, welche sich ihrerseits in der Konstruktion der entsprechenden Wahrheitswerttafel manifestieren könnte. In diesem Fall könnte man sich, wie es scheint, auch Flüchtigkeitsfehler bei der entsprechenden Wahrheitswertberechnung bzw. bei der Konstruktion der entsprechenden Wahrheitswerttafel erlauben, ohne sich dadurch unmittelbar semantisch zu disqualifizieren. Das Verstehen der Bedeutung einer solchen Aussage müsste im Prinzip nur demjenigen *definitiv* abgesprochen werden, der nicht nur Fehler bei ihrer Verifikation begeht, sondern darüber hinaus diese Fehler auch dann nicht einsieht – und also an der Falschheit der Aussage festhält –, nachdem er hierauf aufmerksam gemacht wurde.

2.5 Nach der Explikation der Unterscheidung analytisch/synthetisch in Abschnitt 2.1 seien in diesem Abschnitt auch die mit dieser Unterscheidung zusammenhängenden Begriffe der *Implikation* und der *Äquivalenz* expliziert. Seien ‚p_1' und ‚p_2' Aussagen, so sei zunächst definiert, dass ‚p_1 impliziert p_2' gleichbedeutend damit sei, dass allein die Wahrheitsbedingungen von ‚p_1'

[8] Die hier vorgeschlagene Lesart von Glocks Definition scheint im Übrigen problemlos vereinbar mit den Argumenten Glocks, welche sich auf diese Definition beziehen, insbesondere mit der Idee, dass analytische Aussagen partiell die Bedeutungen ihrer Teilausdrücke bestimmen (vgl. 2003, S. 84).

und ‚p_2' bestimmen, dass an jeder Raumzeitstelle, an der ‚p_1' wahr ist, auch ‚p_2' wahr ist. Dass eine Aussage ‚p_1' eine Aussage ‚p_2' impliziert, ist also äquivalent dazu, dass immer und überall die Wahrheit von ‚p_2' eine Bedingung für die Wahrheit von ‚p_1' ist. Dieser Implikationsbegriff entspricht zwar im Wesentlichen dem Implikationsbegriff der Standardsemantik. Allerdings wird in den Erklärungen dieses Begriffs typischerweise kein Bezug auf Raumzeitstellen gemacht, so dass nicht deutlich wird, dass hierbei ein Zusammenhang zwischen den (räumlich und zeitlich) *simultanen* Wahrheitswerten von Antecedens und Sukzedenz gemeint ist.

Vor der Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Implikationsbegriffs und der Unterscheidung analytisch/synthetisch seien zunächst noch einige abgeleitete Implikationsbegriffe eingeführt. Erstens bedeute, dass eine Menge von Aussagen ‚p_1', ... , ‚p_n' eine Aussage ‚q' impliziert, dass ‚q' durch die Konjunktion ‚$p_1 \wedge ... \wedge p_n$' impliziert wird. Zweitens sei ‚p_1 ist äquivalent zu p_2' gleichbedeutend damit, dass sowohl ‚p_1' ‚p_2' als auch ‚p_2' ‚p_1' impliziert. Und drittens sei die Rede von Implikationen und Äquivalenzen in der folgenden Weise auch in Bezug auf Ausdrücke erklärt die, wie etwa Wahrheitsfunktionen, Namen oder Prädikate, keine Aussagen sind. Dass ein Ausdruck ‚T_1' einen Ausdruck ‚T_2' impliziert, sei gleichbedeutend damit, dass die Wahrheitsbedingungs*beiträge* von ‚T_1' und ‚T_2' bestimmen, dass an jeder Raumzeitstelle, an der eine durch ‚T_1' gebildete Aussage wahr ist, auch die entsprechende durch ‚T_2' gebildete Aussage wahr ist. Dementsprechend wird ‚T_2' genau dann von ‚T_1' impliziert, wenn eine durch ‚T_1' gebildete Aussage stets nur unter der Bedingung wahr, dass an derselben Raumzeitstelle die entsprechende durch ‚T_2' gebildete Aussage wahr ist. Und wie im Fall von Aussagen seien auch zwei Ausdrücke genau dann ‚äquivalent' genannt, wenn sie sich wechselseitig implizieren.

Dass die Wahrheitsbedingungen zweier Aussagen ‚p_1' und ‚p_2' bestimmen, dass an jeder Raumzeitstelle, an der ‚p_1' wahr ist, auch ‚p_2' wahr ist, ist äquivalent dazu, dass die Wahrheitsbedingungen von ‚p_1' und ‚p_2' – sowie die Bedeutungserklärungen ‚$\neg$', ‚$\wedge$' und ‚$\vee$' – bestimmen, dass ‚$\neg p_1 \vee p_2$' an jeder Raumzeitstelle wahr und ‚$p_1 \wedge \neg p_2$' an jeder Raumzeitstelle falsch ist. Folglich gilt zum einen, dass ‚p_1' genau dann ‚p_2' impliziert, wenn ‚$\neg p_1 \vee p_2$' tautologisch bzw. ‚$p_1 \wedge \neg p_2$' kontradiktorisch ist, und zum anderen, dass ‚p_1' genau dann äquivalent zu ‚p_2' ist, wenn ‚$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$ ' tautologisch bzw. ‚$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$' kontradiktorisch ist.[9]

Implikationsbeziehungen zwischen zwei Aussagen können daher durch Bedeutungsanalysen hieraus gebildeter komplexer Aussage festgestellt werden. Genauer kann, ob ‚p_1' ‚p_2' impliziert, dadurch festgestellt werden, dass festgestellt wird, ob ‚$\neg p_1 \vee p_2$' tautologisch ist. Und aus demselben Grund können daher die formalen Tautologiekriterien aus Abschnitt 2.4 zur Bestimmung von Implikationen und Äquivalenzen verwendet werden. In einem

[9] Durch die Übertragung dieser Überlegung von Aussagen auf Ausdrücke lässt sich zeigen, dass analoge Regeln auch für Ausdrücke gelten.

Verwendungsverzeichnis, welches bereits ein hinreichend entwickeltes Tautologiekapitel enthält, müssten Implikationsbeziehungen also im Prinzip nicht ausdrücklich verzeichnet werden, da sie sich aus den Einträgen des Tautologiekapitels ableiten lassen.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Begriff der Implikation und dem der Tautologie ermöglicht es, im Rahmen der Situationssprache zwischen wahrheitsfunktionalen und begrifflichen Implikationen zu unterscheiden. Seien hierfür ‚p_1' und ‚p_2' Aussagen der Situationssprache, dann bedeute „„p_1" impliziert „p_2" wahrheitsfunktional', dass ‚$\neg p_1 \vee p_2$' wahrheitsfunktional-tautologisch ist; und analog hierzu bedeute „„p_1" impliziert „p_2" begrifflich', dass ‚$\neg p_1 \vee p_2$' begrifflich-tautologisch ist. So impliziert ‚Rot ∧ Kreis' wahrheitsfunktional ‚Rot ∨ Kreis', da die Wahrheitsfunktion ‚$\neg(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \vee p_2)$ ' konstant wahr ist. Seien nun T_1 und T_2 beliebige Wahrheitsfunktionen, so kann man bei einer geeigneten Erweiterung der Rede von Wahrheitsmöglichkeiten und Wahrheitsgründen sagen, dass die komplexe Wahrheitsfunktion ‚$\neg T_1 \vee T_2$' genau dann konstant wahr ist, wenn alle Wahrheitsgründe von ‚T_1' auch Wahrheitsgründe von ‚T_2' sind. In diesem Sinn gilt also ganz allgemein, dass eine wahrheitsfunktionale Aussage ‚p_1' eine wahrheitsfunktionale Aussage ‚p_2' genau dann wahrheitsfunktional impliziert, wenn die Wahrheitsgründe von ‚p_1' auch Wahrheitsgründe von ‚p_2' sind.

Ebenso wie begriffliche Tautologien können auch begriffliche Implikationen unter Umständen durch die in Abschnitt 2.1 dargestellten Paradigmenvergleiche identifiziert werden. Angenommen zwei Situationsterme ‚F_1' und ‚F_2' seien durch dieselbe Gleichheitsbeziehung, jedoch durch verschiedene Vergleichsmuster (Paradigmen) erklärt. Wenn nun die Muster nicht gleich in der fraglichen Hinsicht sind, dann ist, wie in Abschnitt 2.1 erläutert, die Aussage ‚$\neg(F_1 \wedge F_2)$' tautologisch, so dass also sowohl ‚$\neg F_2$' durch ‚F_1' impliziert wird, als auch ‚$\neg F_1$' durch ‚F_2'. So folgt etwa aus der Farbverschiedenheit des Rot und des Gelbtäfelchens, dass von den beiden Situationsaussagen ‚Rot' und ‚Gelb' jeweils eine Aussage die Negation der Anderen impliziert. Wenn die Muster von ‚F_1' und ‚F_2' dagegen gleich in der fraglichen Hinsicht sind, so dass also sowohl ‚$\neg(F_1 \wedge \neg F_2)$' als auch ‚$\neg(\neg F_1 \wedge F_2)$' tautologisch ist, dann sind die Situationsaussagen ‚F_1' und ‚F_2' äquivalent. In diesem Sinn folgt daraus, dass der Urfuß 3.3 mal so lang wie das Urmeter ist, dass ‚1 Meter lang' und ‚3.3 Fuß lang' einander wechselseitig implizieren.

Es sei nun untersucht, was das Bestehen von Implikationsbeziehungen für die Verwendung der entsprechenden Aussagen bedeutet! Wie erläutert, folgt daraus, dass eine Aussage ‚p_1' eine Aussage ‚p_2' impliziert, dass die hieraus gebildeten Aussagen ‚$\neg p_1 \vee p_2$' und ‚$p_1 \wedge \neg p_2$' tautologisch bzw. kontradiktorisch sind. Im Hinblick auf die kombinierte Verwendung von ‚p_1' und ‚p_2' in diesen komplexen Aussagen kann daher die Erkenntnis, dass ‚p_1' ‚p_2' impliziert, in derselben Weise verwendet werden, wie die entsprechenden Tautologie- bzw. Kontradiktionserkenntnisse. So kann daraus, dass ‚p_1' ‚p_2' impliziert, etwa darauf geschlossen, dass eine fehlerfreie Verifikation von ‚$\neg p_1 \vee p_2$' deren Wahrheit ergeben muss, und dass daher jemand, der verkündet, die Falschheit dieser Aussage festgestellt zu haben, deren Bedeutung nicht versteht.

Für die *separate* Verwendung von ‚p_1' und ‚p_2' bedeutet der Umstand, dass immer und überall die Wahrheit von ‚p_2' eine Bedingung für die Wahrheit von ‚p_1' ist, dagegen Folgendes: Zum einen muss, wann immer die Verifikation von ‚p_1' deren Wahrheit ergibt, auch die Verifikation von ‚p_2' deren Wahrheit ergeben. Und zum Anderen muss umgekehrt die Verifikation von ‚p_1' deren Falschheit ergeben, wann immer die Verifikation von ‚p_2' deren Falschheit ergibt. Dass ‚p_1' ‚p_2' impliziert, ist demnach gleichbedeutend damit, dass die Wahrheitsbedingungen von ‚p_1' und ‚p_2' bestimmen, dass immer dann, wenn die Verifikation von ‚p_1' deren Wahrheit, die Verifikation von ‚p_2' jedoch deren Falschheit ergibt, zumindest einer der fraglichen Verifikationsvorgänge fehlerhaft sein muss. Falls ‚p_1' ‚p_2' impliziert, kann daher daraus, dass jemand verkündet die Wahrheit von ‚p_1' und die Falschheit von ‚p_2' (simultan) festgestellt zu haben, geschlossen werden, dass derjenige zumindest die Bedeutung einer dieser beiden Aussagen nicht versteht.

Angenommen, es sei bekannt, dass ‚p_1' ‚p_2' impliziert. Wenn nun festgestellt wurde, dass ‚p_1' an einer bestimmten Raumzeitstelle wahr ist, dann ist die Feststellung, ob ‚p_2' an dieser Raumzeitstelle wahr ist, deshalb *überflüssig*, weil sie nach der vorausgesetzten Implikation die Wahrheit von ‚p_2' ergeben muss. Und wenn umgekehrt die Falschheit von ‚p_2' an einer bestimmten Raumzeitstelle festgestellt wurde, dann ist die Verifikation von ‚p_1' an dieser Raumzeitstelle deshalb überflüssig, weil sie nach Voraussetzung deren Falschheit ergeben muss. Implikationsbeziehungen bestimmen demnach *alternative* Methoden zur Feststellung der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen. Denn, dass ‚p_2' wahr ist, kann in der Weise festgestellt werden, dass festgestellt wird, dass, zum einen, ‚p_1' ‚p_2' impliziert, und dass, zum anderen, ‚p_1' wahr ist. Und umgekehrt kann, dass ‚p_1' falsch ist, in der Weise festgestellt werden, dass festgestellt wird, dass ‚p_1' ‚p_2' impliziert, und dass ‚p_2' falsch ist. In beiden Fällen kann also die Verifikation einer Aussage *ersetzt* werden durch die Kombination aus der Verifikation einer anderen Aussage und der Feststellung einer Implikationsbeziehung zwischen beiden Aussagen. Da die Erkenntnis einer solchen Implikationsbeziehung äquivalent zur Erkenntnis der Tautologiezität einer entsprechenden komplexen Aussage ist, kann sich die Feststellung der fraglichen Implikationsbeziehung in den bereits in Abschnitt 2.2 und 2.3 geschilderten Weisen manifestieren, d.h. also durch Verweis auf einen entsprechenden Eintrag im

Verwendungsverzeichnis, durch ein entsprechendes metasprachliches Argument, oder durch bestimmte Operation mit Zeichen und Paradigmen.

Dadurch, dass Implikationsbeziehungen alternative Formen der Wahrheitswertermittlung entsprechender Aussagen bestimmen, bestimmen sie auch alternative Formen von deren Erzeugung und Entscheidung. Es sei wieder angenommen, ‚p_1' impliziere ‚p_2'. In diesem Fall kann auch das Äußern von ‚p_2' als das Resultat der Feststellung der Wahrheit von ‚p_1' (anstatt von ‚p_2') als Erzeugen von ‚p_2' gelten. Und ebenso kann in diesem Fall das Bejahen einer Äußerung von ‚p_2' im Anschluss an die Feststellung der Wahrheit von ‚p_1' als Entscheiden von ‚p_2' gelten. Dabei könnten sich die beiden geschilderten Vorgänge auch so gestalten, dass vor dem Äußern von ‚p_2' bzw. der Bejahung einer solchen Äußerung nicht nur die Wahrheit von ‚p_1' festgestellt, sondern ‚p_1' daraufhin auch geäußert – und also selbst erzeugt – wird. Stellt sich die Erzeugung bzw. Entscheidung von ‚p_2' in dieser Weise dar, so kann das Übergehen von der Äußerung von ‚p_1' zu der Äußerung bzw. Bejahung von ‚p_2' als ein Schließen bezeichnet werden.

Es ist in diesem Zusammenhang darauf hinzuweisen, dass die einseitige Implikation einer Aussage ‚p_2' durch eine andere Aussage ‚p_1' noch keine alternativen Verifikationsmethoden für ‚p_1' und ‚p_2' bestimmt, insofern unter dieser Voraussetzung, *ob* ‚p_2' wahr ist, nicht in jedem Fall in der Weise festgestellt kann, dass man feststellt, *ob* ‚p_1' wahr ist. Denn falls die Feststellung, ob ‚p_1' wahr ist, ergibt, dass ‚p_1' wahr ist, so hat man damit zwar festgestellt, dass auch ‚p_2' wahr ist. Doch wenn die Feststellung, ob ‚p_1' wahr ist, ergibt, dass ‚p_1' falsch ist, so hat man damit weder festgestellt, dass ‚p_2' wahr ist, noch, dass ‚p_2' falsch ist. Nur wenn ‚p_1' äquivalent zu ‚p_2' ist, ist es in jedem Fall möglich, ‚p_2' durch eine Verifikation von ‚p_1' (und unabhängig von dem dabei ermittelten Wahrheitswert von ‚p_1') zu verifizieren. In diesem Fall kann also, ob ‚p_2' wahr ist, tatsächlich stets dadurch festgestellt werden, dass festgestellt wird, ob ‚p_1' wahr ist; und umgekehrt.

Es ist ferner zu bemerken, dass analytische Definitionen Äquivalenzen herstellen. So gilt etwa in Folge der analytischen Definition „‚Schimmel" bedeutet: weißes Pferd' aus Abschnitt 1.5, dass die Wahrheitsbedingungen von ‚Schimmel' und ‚Pferd $\wedge$ weiß' bestimmen, dass diese beiden Situationsaussagen an beliebigen Raumzeitstellen denselben Wahrheitswert haben. Dennoch besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den durch analytischen Definitionen bestimmten Äquivalenzen und solchen Äquivalenzen, die sich – wie etwa im Fall von ‚1 Meter lang' und ‚3.3 Fuß lang' – erst durch eine entsprechende Bedeutungsanalyse ermitteln lassen. Denn während es im Fall von ‚Schimmel' und ‚Pferd $\wedge$ weiß' überhaupt nur *eine* Verifikationsmethode gibt, welche zunächst dem Definiens und dann dem Definiendum zugeordnet wird, entsprechen ‚1 Meter lang' und ‚3.3 Fuß lang' jeweils *verschiedene* Verifikationsmethoden, deren Anwendung jedoch –

wie die fragliche Bedeutungsanalyse zeigt – in jedem Fall zu demselben Resultat führen muss.[10] Aus diesem Grund ist die Äquivalenz von Aussagen oder Ausdrücken auch nicht gleichbedeutend mit deren Bedeutungsgleichheit. Denn das Verstehen der Bedeutung etwa von ‚1 Meter lang' und ‚3.3 Fuß lang' manifestiert sich im Befolgen der jeweiligen Verifikationsregel und damit also in jeweils verschiedener Weise.[11]

Zum Abschluss dieses Abschnitts seien dessen Ergebnisse noch einmal kurz zusammengefasst. Diejenigen Tautologieeinträge, welche – wie etwa ‚¬(Rot∧Gelb)' – durch ihre Form gewisse Implikationsbeziehungen bestimmen, können also als Schlussparadigmen verwendet werden. So kann der Übergang von der Äußerung der Situationsaussage ‚Rot' zur Äußerung von ‚¬Gelb' durch den Verweis darauf gerechtfertigt werden, dass ‚¬(Rot∧Gelb)' tautologisch ist. Und die Möglichkeit derartiger Schlüsse bringt eine wesentliche Modifikation des Erzeugungs- und des Entscheidungsspiels mit sich, insofern sich die für Erzeugung und Entscheidung einer Aussage konstitutive Ermittlung ihres Wahrheitswerts nun auch derart gestalten kann, dass nicht die Aussage selbst, sondern eine andere Aussage verifiziert wird, welche Erstere impliziert. So kann etwa, dass ‚¬Gelb' auf einen gegebenen Untersuchungsgegenstand zutrifft – und folglich geäußert werden kann bzw. zu bejahen ist – auch dadurch festgestellt werden, dass die Farbgleichheit dieses Gegenstands mit dem Rottäfelchen festgestellt wird.

Wie zuvor erläutert, kann die Möglichkeit des Schließens – also die Möglichkeit, die Verifikation einer Aussagen durch die einer Anderen zu ersetzen – durch die Möglichkeit verständlich gemacht werden, die dem Schluss zu Grunde liegende Implikationserkenntnis als Kriterium für Verifikationsfehler zu verwenden. Durch die Feststellung der Wahrheit des Antezedens einer geltenden Implikation hat man in dem Sinn auch bereits die Wahrheit des entsprechenden Sukzedenz festgestellt, dass man festgestellt hat, dass die fehlerfreie durchgeführte Verifikation des Sukzedenz nur dessen Wahrheit ergeben kann. So bestimmt etwa die Farbverschiedenheit des Rot- und des Gelbtäfelchens zunächst, dass man nicht feststellen kann, dass die Situationsaussagen ‚Rot' und ‚Gelb' an ein und derselben Raumzeitstelle wahr sind. Und hieraus folgt, dass man durch die Feststellung der Wahrheit einer der beiden Aussagen ebenfalls bereits die Falschheit der Anderen festgestellt hat.

Die durch eine entsprechende Implikationsbeziehung – bzw. eine entsprechende Tautologie – bestimmte Möglichkeit des Schließens zieht also unter geeigneten Umständen die

[10] Die durch ‚1 Meter lang' und ‚3.3 Fuß lang' bestimmten Verifikationsschritte bestehen in Längenvergleichen mit verschiedenen Maßstäben. Der Unterschied in der Verifikationsmethode betrifft in diesem Fall also lediglich die Wahl des zu gebrauchenden Längenparadigmas.

[11] Eine ähnliche Unterscheidung zwischen Ausdrücken, welche dieselben Anwendunsgregeln haben und Solchen, deren Anwendbarkeit trotz der Verschiedenheit ihrer Anwendunsgregeln äquivalent ist, findet sich auch bei Rundle 1979, S. 435 ff.. Ausdrücke letzterer Art bezeichnet er als ‚deduktiv äquivalent'.

Möglichkeit einer Verifikationsersparnis nach sich. So lehrt etwa die Erkenntnis, dass ‚¬(Rot∧Gelb)' tautologisch, dass man sich den Farbvergleich eines Gegenstands mit dem Gelbtäfelchen sparen kann, wenn man bereits dessen Farbgleichheit mit dem Rottäfelchen festgestellt hat. Und in dieser Art der Verifikationsersparnis liegt ein wesentlicher praktischer Nutzen des Schließens und damit auch einer der wesentlichen Zwecke der Archivierung von Schlussparadigmen. Im Hinblick auf die Verwendung von Aussagen im Mitteilungsspiel erhellt aus diesen Überlegungen ferner, inwiefern das Mitteilen von Aussagen, welche von bereits mitgeteilten Aussagen impliziert werden, redundant ist. Denn wenn ‚p_2' von ‚p_1' impliziert wird, dann teilt ‚p_2' nicht mehr mit, als sich bereits ‚p_1' und den Wahrheitsbedingungen von ‚p_1' und ‚p_2' entnehmen lässt. Die Mitteilung von ‚p_1' erspart daher dem jeweiligen Adressaten nicht nur die Verifikation von ‚p_1'; sie erspart ihm auch die für die Verifikation von ‚p_2' eventuell erforderlichen Wirklichkeitsuntersuchungen.

3. Philosophie der Logik

Eine Tautologie wie ‚Es regnet ∨¬ Es regnet' ist von dem entsprechenden Tautologiesatz „„Es regnet ∨¬ Es regnet" ist tautologisch' zu unterscheiden.[1] Während erstere eine nichtsagende Behauptung ist, drückt letztere eine logische Regel aus. Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird zu zeigen sein, dass mathematische Aussagen – obwohl ihre Form etwas anderes nahelegen mag – Schlussregeln für empirische Aussagen ausdrücken. Vorbereitend hierzu soll in diesem Kapitel gezeigt werden, dass sowohl Wittgensteins Autonomiethese als auch seine Normativitätsthese in Bezug auf Tautologiesätze korrekt ist, d.h. also in Bezug auf diejenigen Sätze, welche in expliziter Weise bestimmte logische Regeln ausdrücken. Hierfür soll in den beiden ersten Abschnitten gezeigt werden, dass Sätze, die logische Regeln ausdrücken keiner Wirklichkeit verantwortlich sind, und zumindest partiell die Bedeutungen derjenigen Ausdrücke erklären, auf welche sie sich beziehen. In den beiden darauffolgenden Abschnitten 3.3 und 3.4 soll diese Auffassung dann gegen einige Einwände Quines verteidigt werden.

3.1 Mit Blick auf die Überlegungen des vorangegangen Kapitels könnte man die *Semantik* und die *Logik* einer Sprache wie folgt unterscheiden. Die Semantik besteht aus den von Regeln für die Verifikation (und damit für die Erzeugung und Entscheidung) der Aussagen der fraglichen Sprache, welche sich durch Wahrheitsbedingungsangaben (bzw. Bedeutungserklärungen) formulieren lassen. Dagegen besteht die Logik einer Sprache aus den Schlussregeln zwischen ihren Aussagen, welche sich durch entsprechende Implikationssätze bzw. Tautologiesätze formulieren lassen. Dabei kann die Bestimmung der Semantik und der Logik einer Sprache in der Reihenfolge geschehen, dass zuerst die Bedeutungen der Ausdrücke der Sprache festgelegt werden, um dann hieraus entsprechende Implikationsregeln abzuleiten. Wie zuvor in Abschnitt 2.5 geschehen, kann also etwa, dass ‚¬ Gelb' von ‚Rot' impliziert wird, als Folge der Bedeutungserklärungen von ‚Rot', ‚Gelb' und ‚¬' dargestellt werden. Und ebenso ließe sich etwa aus einer Bedeutungserklärung von ‚¬' ableiten, dass ‚¬¬p' äquivalent zu ‚p' – und nicht etwa zu ‚¬p' – ist.

Es ist zu bemerken, dass sich zumindest im Prinzip das Verhältnis von Logik und Semantik *teilweise* umkehren lässt. Denn es könnten auch zunächst bestimmte Implikationssätze festgesetzt werden, um dann aus diesen Sätzen entsprechende Bedeutungserklärungen abzuleiten;

[1] Wie in Abschnitt 2.5 erläutert wurde, kann ein Tautologiesatz der Form „„¬p∨q" ist tautologisch' auch als Implikationssatz „„p" impliziert „q"" formuliert werden. Eine solche Unterscheidung zwischen Tautologien und entsprechenden Tautologie- bzw. Implikationssätzen findet sich auch schon in Wittgenstein, LPA 6.1201 (vgl. hierzu

also Bedeutungserklärungen, aus denen die zunächst festgesetzten Implikationssätze in der zuvor erläuterten Weise ableitbar wären. So könnte man etwa bestimmen, dass ‚–' als einstellige Wahrheitsfunktion zu erklären sei, für die gelte, dass ‚– – p' sowohl äquivalent zu ‚– p' also auch zu ‚p' ist. Da aus der Geltung beider Äquivalenzen folgt, dass ‚–p' genau dann wahr ist, wenn ‚p' wahr ist, könnte ‚–' also nur in dieser Weise erklärt werden.

Da auch Schlussregeln Verwendungsregeln sind, werden die sie formulierenden Implikationssätze in analoger Weise verwendet wie Bedeutungserklärungen. Sie werden zitiert, um die Verwendungsweisen von Ausdrücken zu erklären oder um die Korrektheit bestimmter Ausdrucksverwendungen zu bewerten. In diesem Sinn könnte etwa der Satz „‚¬¬p" ist äquivalent zu „p" ' geäußert werden, um jemandem zu erklären, wie die doppelte Negation zu verstehen ist, oder um den Übergang von einer Äußerung von ‚¬¬p' zu der von ‚p' zu rechtfertigen, oder aber um jemanden zu kritisieren, der zwar ‚¬¬p' bejaht, aber ‚p' verneint. Wenn ein Implikationssatz in diesem Sinn zitiert wird, handelt es sich bei seiner Äußerung genauso wenig um das Erzeugen einer Aussage wie im Fall des Zitierens eine Bedeutungserklärung. In beiden Fällen kann die Äußerung (des Implikationssatzes bzw. der Bedeutungserklärung) zwar im Sinn eines Zitats korrekt bzw. inkorrekt sein; also in Abhängigkeit davon, ob der geäußerte Satz im Verwendungsverzeichnis steht oder nicht. Doch das Verstehen der Bedeutung des geäußerten Satzes, manifestiert sich nicht darin, ob er korrekt zitiert wird, sondern darin, dass er in korrekter Weise als Maßstab für die Bewertung von Ausdruckverwendungen benutzt wird. So muss jemandem, der die Bedeutung von „‚Rot" impliziert „¬ Gelb"' versteht, unter Anderem klar sein, dass dieser Satz nicht zitiert werden kann, um z.B. den Übergang von ‚Rot' zu ‚Blau' zu kritisieren oder den Übergang von ‚Rot' zu ‚¬ Blau' zu rechtfertigen.

Von dieser *normativen* Verwendungsweise von Implikationssätzen kann eine zweite Verwendungsweise unterschieden werden, welche sich aus der zuvor erläuterten Möglichkeit der Ableitung von Implikationssätzen aus Bedeutungserklärungen (bzw. Wahrheitsbedingungsangaben) ergibt. Denn durch die Äußerung eines Implikationssatzes könnte man auch dessen Ableitbarkeit aus den Bedeutungserklärungen der entsprechenden Ausdrücke behaupten wollen. Implikationssätze können somit also auch als *Ableitbarkeitsaussagen* verwendet werden, welche genau dann wahr sind, wenn sie sich aus den Bedeutungserklärungen ableiten lassen. So lässt sich feststellen, dass Sätze wie „‚Rot" impliziert „¬ Gelb" ' oder „‚¬¬p" ist äquivalent zu „p"' in diesem Sinn wahr sind, indem die Bedeutungserklärungen der hierfür relevanten Ausdrücke untersucht wurden. In dieser Weise werden Implikationssätze in der Logik verwendet; und in eben diesem Sinn wurden sie auch zuvor in Abschnitt 1.5 verwendet. Wird ein

Implikationssatz in diesem Sinn als Ableitungsaussage verwendet, manifestiert sich sein Verstehen also darin, dass er (in korrekter Weise) aus den Bedeutungserklärungen von Antecedens und Sukzedenz abgeleitet wird. Und die fragliche Ableitung ist als ein Argument für die *Gültigkeit* der durch den Implikationssatz kodifizierten Schlussregel aufzufassen, also dafür, dass man so schließen kann, wie der Implikationssatz es sagt. Daher könnte man sagen, dass ein Implikationssatz genau dann in diesem Sinn als Ableitbarkeitsaussage geäußert werden kann, wenn es *möglich* ist, ihn normativ zu verwenden; also nicht nur dann, wenn er bereits im Verwendungsverzeichnis steht, sondern, wenn er darin stehen könnte.

Angenommen nun, es werde im Rahmen der *nachträglichen* Kodifizierung der Verwendungsregeln einer bereits praktizierten Sprache nach der Möglichkeit gefragt, einen bestimmten Implikationssatz in das zu erstellende Verwendungsverzeichnis einzutragen. In diesem Fall ist die Bedingung dafür, einen Implikationssatz in das fragliche Verzeichnis eintragen zu können, nicht seine Ableitbarkeit aus bereits eingetragen Sätzen. Vielmehr kann der fragliche Implikationssatz nur dann ins Verzeichnis eingetragen werden, wenn die Schlussregel, die er kodifiziert, von den Sprechern der Sprache tatsächlich befolgt wird. Angenommen etwa die demonstrativen Aussagen ‚Rot‘ und ‚¬ Gelb‘ würden von den Sprechern einer bestimmten Sprachgemeinschaft in der durch die in Abschnitt 1.5 angegebenen Wahrheitsbedingungen bestimmten Weise verwendet, so wäre der Implikationssatz „‚Rot‘ impliziert ‚¬ Gelb‘“ zwar als Gültigkeitsaussage wahr, insofern er sich aus den fraglichen Wahrheitsbedingungsangaben ableiten lässt. Als Kodifikationsaussage in Bezug auf die fragliche Sprachgemeinschaft wäre er aber dennoch falsch, falls die Gemeinschaftsmitglieder ‚¬ Gelb‘ stets nur auf der Grundlage eines Farbvergleichs des gegebenen Untersuchungsgegenstand mit dem Gelbtäfelchen, und niemals allein auf der Grundlage von dessen festgestellter Farbgleichheit mit dem Rottäfelchen äußern. Es kann also eine dritte Verwendungsweise von Implikationssätzen unterschieden werden. Ein Implikationssatz kann auch als *Kodifizierungsaussage* verwendet werden, welche genau dann wahr ist, wenn die durch den Implikationssatz kodifizierte Regel *in Kraft* ist; also dann, wenn sich die Sprecher, deren Sprache es zu kodifizieren gilt, nach der fraglichen Regel richten. Falls die Sprecher die Sprache verstehen, in welcher der Implikationssatz formuliert ist, dann hängt die Verwendungsweise eines Implikationssatzes als Kodifikationsaussage mit seiner normativen Verwendungsweise derart zusammen, dass die Kodifikationsaussage genau dann wahr ist, wenn die Sprecher bereit wären, den fraglichen Implikationssatz normativ – als Maßstab für ihre eigenen Schlüsse – zu verwenden.

Aussagen über die *Gültigkeit* und über das *In-Kraft-Sein* von Schlussregeln sind offenbar nicht äquivalent. Die in der Logik verwendeten Gültigkeitsaussagen sind analytisch. Ihr Wahrheitswert hängt nur von den Bedeutungserklärungen des entsprechenden Antezedens und

Sukzedens ab, welche auch zur Bedeutung der Gültigkeitsaussage – also des Implikationssatzes – selbst gehören. Dagegen sind Kodifikationsaussagen synthetisch. Sie sind zu den Zeitpunkten wahr, an denen die Mitglieder der Sprachgemeinschaft, auf welche die Aussagen bezogen werden, bereit sind, in der durch den entsprechenden Implikationssatz kodifizierten Weise zu schließen.[2] Dass eine Schlussregel relativ zu anderen Verwendungsregeln gültig ist, impliziert nicht, dass, wo immer die Verwendungsregeln in Kraft sind, auch die fragliche Schlussregel in Kraft ist. Denn die Gültigkeit einer Schlussregel kann den Sprechern unbekannt und die Regel daher nicht in Kraft sein. Allerdings kann natürlich das Erkennen der Gültigkeit einer Schlussregel dazu führen, dass die fragliche Regel in Kraft gesetzt wird. D.h., es wird damit begonnen, der Regel gemäß zu schließen, nachdem erkannt wurde, dass so geschlossen werden kann. Und es scheint, dass die Rolle der Logik angemessen charakterisiert wird, wenn man in diesem Sinn sagt, sie setze als gültig erkannte Schlussregeln in Kraft.

Wittgensteins Behauptung, wonach die Logik Begriffe bilde, scheint im Sinne dieser Charakterisierung verstanden werden zu können (BGM, III §§29-32). Zunächst suggeriert Wittgensteins Rede davon, dass die Logik eine Art Begriffs*bildung* sei, zwar zu Recht, dass die Logik einen dynamischen und also zeitlichen Aspekt habe. Es ist allerdings festzuhalten, dass die fragliche Zeitlichkeit nur das In-Kraft-Sein und nicht die Gültigkeit von Schlussregeln betrifft. Denn nur die Wahrheitswerte von Kodifikationsaussagen, nicht die der entsprechenden Ableitbarkeitsaussagen hängen von Zeitpunkt ihrer Äußerung ab. Wird nun die Rede von Begriffen durch die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Rede von Wahrheitsbedingungen ersetzt, so kann man also sagen, dass die Veränderung, welche durch die Erkenntnis der Gültigkeit einer Schlussregel herbeiführt wird, darin besteht, dass die Wahrheit des Sukzedenz als eine neue Wahrheitsbedingung des Antecedens bestimmt wird. Denn eine Schlussregel in Kraft zu setzen, bedeutet, die Feststellung der Wahrheit des entsprechenden Antecedens als Feststellung der Wahrheit des Sukzedenz gelten zu lassen. Das In-Kraft-Setzen von Schlussregeln ist also als ein Bestimmen von Wahrheitsbedingungen aufzufassen, und somit, wenn man so will, als eine Art der Begriffsbildung.

Anstatt von einem Bestimmen neuer Wahrheitsbedingungen spricht Wittgenstein auch von einem Bestimmen neuer Kriterien (BGM, VI §16). Auch wenn dieser Punkt später – in Abschnitt 9.5 – im Zusammenhang mit arithmetischen Gleichungen noch ausführlich diskutiert werden soll, sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, wie diese Art der Neubestimmung zu verstehen ist. Das neue Kriterium kann jeweils *alternativ* zum alten Kriterium benutzt werden, da, wie die Logik lehrt, wann immer die Anwendung des neuen Kriteriums zu einem positiven

[2] Die Formulierung einer Kodifikationsaussage allein durch den entsprechenden Implikationssatz ist also insofern elliptisch, als sie den erforderlichen Bezug auf eine bestimmte Sprachgemeinschaft nicht enthält.

Ergebnis führt, auch die Anwendung des alten Kriteriums zu einem positiven Ergebnis führen muss. So lehrt etwa die Feststellung der Farbverschiedenheit des Rot- und des Gelbtäfelchens, dass nicht nur die Farbverschiedenheit vom Gelbtäfelchen, sondern auch die Farbgleichheit mit dem Rottäfelchen ein Kriterium für die Wahrheit von ‚¬ Gelb' ist, da wann immer ein Gegenstand dem Kriterium ‚farbgleich mit dem Rottäfelchen' genügt, er auch dem Kriterium ‚nicht farbgleich mit dem Gelbtäfelchen' genügen muss. Wenn Wittgenstein von der Bestimmung eines *neuen* Kriteriums spricht, meint er also weder eine *Präzisierung* eines alten Kriteriums, noch einen Kriterien*wechsel*. Es ist also nicht gemeint, dass nach der Bestimmung des neuen Kriteriums in jedem Fall – oder zumindest in den durch das alte Kriterium eventuell unbestimmt gelassenen Fällen – das neue Kriterium anstelle des Alten zu gebrauchen ist. Sondern das neue Kriterium kann nach seiner Bestimmung entweder alternativ oder auch zusätzlich zum alten Kriterium benutzt werden; etwa um zu überprüfen, ob das alte Kriterium *korrekt angewendet* wurde.[3]

Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit erläutert wurde, sind Verwendungsregeln von Ausdrücken genau dann für die Bedeutung der fraglichen Ausdrücke konstitutiv, wenn ihre Kenntnis wesentlich für das Verstehen der Bedeutung der Ausdrücke ist. Da auch Schlussregeln die Verwendung von Antezedenz und Sukzedenz regulieren, ist also danach zu fragen, ob die Kenntnis von Schlussregeln *verständnisrelevant* ist, und ob somit logische Regeln in jedem Fall auch als semantische Regeln aufzufassen sind. Die Kenntnis einer Schlussregel kann sich im Wesentlichen in zweierlei Weise manifestieren. Zum einen darin, der Regel entsprechend zu schließen, und zum anderen darin, die der Regel entsprechenden Schlüsse Anderer als korrekt anzuerkennen. Wie zuvor erläutert wurde, ist das Schließen optional, also als Alternative zur Verifikation aufzufassen: wenn die Wahrheit des Antezedenz festgestellt wurde, dann kann anstelle der Verifikation des Sukzedenz auch unmittelbar auf dessen Wahrheit geschlossen werden. Und es scheint klar, dass man nicht bereits dadurch Verständnisdefizite manifestiert, dass man die Option des Schließens – trotz ihrer praktischen Vorteile – nicht wahrnimmt. Man kompromittiert sich also nicht bereits dadurch, dass man nach der Feststellung der Wahrheit des Antezedenz auch das Sukzedens verifiziert, anstatt auf dessen Wahrheit zu schließen. Angenommen nun, jemand stellt die Korrektheit eines gültigen Schlusses eines anderen Sprechers in Frage. In Bezug auf diesen Fall scheint man sagen zu können, dass der Zweifelnde durch sein Infragestellen dann und nur dann Verständnisdefizite manifestiert, wenn die Gültigkeit der Schlussregel bekannt und diese also bereits in Kraft ist. Es bietet sich sogar an, ganz allgemein die Rede vom In-Kraft-Sein einer Schlussregel in dieser Weise mit dem Begriff des Verstehens in Verbindung bringen: eine Schlussregel gilt genau dann als ‚in Kraft', wenn ihre

[3] In Kapitel 9.5 wird auf diesen Punkt sowie auf Dummetts etwas kuriose Behauptung eingegangen werden, wonach Wittgenstein deshalb nicht gemeint habe könne, dass neue und alte Kriterien in jedem Fall ihrer Anwendung übereinstimmen müssen, weil dies trivialer Weise wahr sei (vgl. Dummett 1973, S. 300/1).

Kenntnis als relevant für das Verstehen der Bedeutung von Antezendes und Sukzendens gilt. Insofern scheint man also sagen zu können, dass die Logik dadurch, dass sie neue Wahrheitsbedingungen bestimmt, auch den Begriff der Bedeutung und den des Verstehens weiterbildet. Denn die neuen Wahrheitsbedingungen und also die in Kraft gesetzten Schlussregeln nicht zu kennen, gilt als Verständnisdefizit.

3.2 Ebenso wie analytische Definitionen werden gerade begriffliche Implikationen in der Umgangssprache oft auch ohne die Verwendung von Anführungszeichen formuliert. Typischerweise nehmen solche „materialen" Formulierungen die Form von Gesetzesaussagen an. So könnte etwa, dass ‚¬ Gelb' von ‚Rot' impliziert wird, durch ‚Wenn etwas rot ist, dann ist es nicht gelb' ausgedrückt werden. Und analog hierzu könnte die analytische Definition „‚Schimmel" bedeutet: weißes Pferd' durch ‚Ein Schimmel ist ein weißes Pferd' formuliert werden.

Auch echte – d.h.: empirische – Gesetzesaussagen wie etwa ‚Wenn es schneit, dann ist es kalt' werden in Zusammenhang mit Schlüssen verwendet. Daher legt es sich nahe, den Verwendungsunterschied zwischen material formulierten Implikationssätzen und (empirischen) Gesetzesaussagen vor diesem Hintergrund darzustellen. Seien ‚F' und ‚G' Prädikate, so folgt daraus, dass die Situationsaussage ‚Dies ist G' von der Situationsaussage ‚Dies ist F' impliziert wird, dass auch alle anderen elementaren durch ‚F' gebildeten Aussagen jeweils die entsprechenden durch ‚G' gebildeten Aussagen implizieren. Daraus, dass ‚Dies ist G' durch ‚Dies ist F' impliziert wird, folgt also z.B., dass auch ‚a ist G' durch ‚a ist F' impliziert wird, so dass in diesem Fall also von ‚a ist F' auf ‚a ist G' geschlossen werden kann. *Unabhängig* davon, ob ‚Dies ist G' durch ‚Dies ist F' impliziert wird, kann aus einer durch ‚F' gebildeten Aussagen sowie der Gesetzesaussage ‚Wenn etwa F ist, dann ist es G' – oder kurz: Wenn F, dann G – stets auf die entsprechende durch ‚G' gebildete Aussage geschlossen werden. So kann also etwa von ‚a ist F' und ‚Wenn F, dann G' auf ‚a ist G' geschlossen werden.

Doch auch wenn in diesen beiden Fällen Sätze analoger Form verwendet werden, sind die jeweiligen Schlüsse jedoch von grundsätzlich verschiedener Art. Im zuerst geschilderten Fall wird von ‚a ist F' auf ‚a ist G' geschlossen. Dabei stellt das Konditional ‚Wenn F, dann G' die angewendete *Schlussregel* dar, deren Geltung – also deren Ableitbarkeit aus den Bedeutungserklärungen von ‚F' und ‚G' – hierbei unterstellt wird. Im zweiten Fall wird dagegen von ‚a ist F' *und* ‚Was F ist, ist G' – oder auch von der Konjunktion ‚a ist F ∧ Wenn F, dann G' – auf ‚a ist G' geschlossen. Dass Konditional ‚Wenn F, dann G' ist in diesem Fall eine *Prämisse* des Schlusses. Und die hierbei verwendete Schlussregel, dessen Gültigkeit durch die Bedeutung des Ausdrucks ‚Wenn ..., dann ... ' bestimmt wird lautet, dass ‚a ist G' durch ‚a ist F ∧ Wenn F, dann

G‘ impliziert wird. Wenn nun im Fall eines Schlusses der ersten Art die Schlussregel geäußert wird, im Falle eines Schlusses der zweiten Art dagegen nicht, dann drücken sich beide Schlüsse also formal in derselben Weise aus; in jedem Fall werden zwei singuläre Aussagen und ein Konditional geäußert. Und welche Art des Schlusses beabsichtigt ist, hängt dann davon ab, wie das Konditional ‚Wenn F, dann G‘ gemeint ist. Dabei müsste, ob ein Sprecher das Konditional als Schlussregel oder als empirische Prämissen verstanden wissen will, dadurch festgestellt werden, dass überprüft wird, ob und, wenn ja, welche Art der Verifikation der Sprecher für das Konditional zulässt. Die Äußerung von ‚Wenn F, dann G‘ ist als Gesetzesaussage gemeint, falls eine Verifikation derart zugelassen (bzw. durchgeführt) wird, dass jeder hierfür in Frage kommende Gegenstand daraufhin untersucht wird, ob sowohl ‚F‘ als auch ‚¬G‘ auf ihn zutrifft und er damit also ein Gegenbeispiel zu ‚Wenn F, dann G‘ darstellt. Dagegen ist die Äußerung als Implikationssatz gemeint, wenn das Finden ein solches Gegenbeispiel nicht empirisch, sondern logisch ausgeschlossen wird, indem also entweder keine Verifikation von ‚Wenn F, dann G‘ zugelassen oder hierbei nur auf die Bedeutungserklärungen von ‚F‘ und ‚G‘ verwiesen wird.

Natürlich ist es in der Umgangssprache auch möglich, die jeweils beabsichtigte Verwendungsweise von Konditionalen durch den Gebrauch spezieller Formulierungen zum Ausdruck zu bringen. So könnten etwa Schlussregeln jeweils in der Form ‚Wenn F, dann notwendigerweise G‘ und empirische Gesetzesaussagen in der Form ‚Wenn F, dann erfahrungsgemäß G‘ ausgedrückt werden. Allerdings müssten die beiden die Verwendungsweise kennzeichnenden Ausdrücke ‚notwendigerweise‘ und ‚erfahrungsgemäß‘ ihrerseits auf der Grundlage der zuvor unterschiedenen Verwendungsweise eingeführt werden, also durch Bezug auf Art und Möglichkeit der Verifikation des zu Grunde liegenden Konditionals ‚Wenn F, dann G‘.

Was im Rahmen dieser Arbeit als Semantik und Logik einer Sprache bezeichnet wird, nennt Wittgenstein deren *Grammatik*. Verwendungsregeln – also insbesondere Verifikations- und Schlussregeln – werden dementsprechend als Regeln der Grammatik bezeichnet. Und Sätze, welche Verwendungsregeln (formal oder material) formulieren, nennt Wittgenstein ‚grammatisch’ (PG, §§45/46). Wie bereits mehrfach erwähnt, ist es eine der zentralen These von Wittgensteins Spätphilosophie, dass grammatische Regeln in dem Sinn autonom sind, dass sie keiner Wirklichkeit verantwortlich sind. Verschiedentlich formuliert er diese These auch dadurch, dass er grammatische Regeln als ‚willkürlich‘ beschreibt. Er erläutert diese Rede jedoch dahingehend, dass damit nur gemeint sein solle, dass grammatische Sätze nicht die Wirklichkeit darstellen. Sie können also nicht mit dieser, sondern nur *untereinander* in Konflikt geraten, insofern sie einander widersprechen können (PG, §133; PG, II §1).

Es erscheint zunächst klar, dass durch die Äußerung einer Bedeutungserklärung oder durch die *normative* Verwendung eines Implikationssatzes nicht die Wirklichkeit dargestellt wird. Denn in Fällen dieser Art wird keine Aussage gemacht, sondern eine Regel, also ein Maßstab für die Verwendung von Ausdrücken angegeben. Die Unterscheidung autonom/heteronom kann demnach nur die assertorische Verwendung grammatischer Sätze betreffen, also deren Verwendung als Gültigkeits- bzw. als Kodifikationsaussagen. Sie fällt somit mit der Unterscheidung analytisch/synthetisch, so wie diese zuvor in Abschnitt 2.1 definiert wurde zusammen.[4] Wie bereits festgestellt wurde, sind Kodifikationsaussagen synthetisch und also nicht autonom. Mit Blick auf Wittgensteins Erläuterung der Autonomiethese kann jedoch unterstellt werden, dass er diese These nicht auf die kodifizierende Verwendungsweise beziehen wollte. Es ist in diesem Zusammenhang ferner zu bemerken, dass ein wesentlicher Zweck der Autonomiethese darin besteht, den Unterscheid zwischen empirischen Gesetzesaussagen und material formulierten Implikationssätzen oder Bedeutungserklärungen zu betonen. Und auch wenn ein kodifizierend verwendeter Implikationssatz eine Art Gesetzesaussage ist, so ist dessen Wirklichkeitsbezug von grundlegend anderer Art als der Wirklichkeitsbezug der zuvor diskutierten Gesetzesaussagen. Denn eine material formulierte Kodifikationsaussage der Form ‚Wenn F, dann G' ist eine Aussage über das Verhalten bestimmter Sprecher, welche genau dann wahr ist, wenn diese von ‚F' auf ‚G' schließen. Bei Verwendung als empirische Gesetzesaussage wäre ‚Wenn F, dann G' dagegen eine Aussagen über Gegenstände, welche genau dann wahr ist, wenn es keinen Gegenstand gibt, auf den zwar ‚F' aber nicht ‚G' zutrifft.

Gültigkeitsaussagen sind analytisch und also autonom in Wittgensteins Sinn. Das Ausdrücken der Gültigkeit einer Schlussregel ist zwar kein Festsetzen, sondern ein Aussagen, insofern (mehr oder weniger systematisch) zwischen gültigen und ungültigen Schlussregeln und damit zwischen wahren und falschen Gültigkeitsaussagen unterschieden werden kann. Doch wie zuvor erläutert, hängt die Gültigkeit einer Schlussregel und damit die Wahrheit einer entsprechenden Gültigkeitsaussage bzw. eines entsprechenden grammatischen Satzes nicht von einer Art Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, sondern nur von der Ableitbarkeit der Schlussregel aus bestimmten anderen Verwendungsregeln ab. Dass bestimmte Verwendungsregeln nicht einfach festgesetzt, sondern aus anderen Verwendungsregeln abgeleitet werden, spricht also nicht gegen die Autonomie der Grammatik.

Man könnte zuletzt noch die Frage aufwerfen, ob durch die Bedingung, dass grammatische Regeln einander nicht widersprechen dürfen, nicht doch eine Art Wirklichkeitsabhängigkeit gegeben sei. Denn man könnte meinen, dass eine solche

[4] Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass Wittgenstein selbst die Ausdrücke ‚analytisch' und ‚synthetisch' kaum verwendet und verschiedentlich einen Gebrauch dieser Ausdrücke nahelegt, der nicht dem Gebrauch dieser Ausdrücke im Rahmen dieser Arbeit übereinstimmt (vgl. etwa BGM, VI §36).

Kohärenzforderung allein durch die Idee motiviert sein könne, dass die Inkohärenz eines Regelsystems – analog zur Inkohärenz eine Menge synthetischer Aussagen – die Möglichkeit ausschlösse, dass dieses System wahr ist, bzw. dass es mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Warum die Kohärenz von Verwendungsregeln gefordert wird – und auch was damit gefordert wird –, ersieht man aus den Konsequenzen, welche durch die Einhaltung dieser Forderung vermieden werden. Um zu verstehen, was die Unvereinbarkeit von Verwendungsregeln bedeutet und inwiefern man unvereinbare Regeln nicht kombinieren kann, muss also danach gefragt werden, was geschähe, wenn man es täte.

Die Wahrheitsbedingungsangaben von Aussagen formulieren Regeln für das Bejahen oder Verneinen von Äußerungen der fraglichen Aussagen, also Regeln dafür, wie das Entscheidungsspiel mit den Aussagen gespielt wird. Und die Grundidee des Entscheidungsspiels – und in diesem Sinn wesentlich für die Rede von einem *Entscheiden* – ist es, dass das Bejahen und Verneinen als einander wechselseitig *ausschließende* Alternativen aufzufassen sind. Die Regeln dieses Spiels müssen sich also derart gestalten, dass sie – eventuell in Abhängigkeit von der Wirklichkeitsbeschaffenheit – in jedem Fall nur eine dieser beiden Handlungen, also das Bejahen oder das Verneinen als korrekt bestimmen. Es sei nun genauer die Entscheidung der Situationsaussage ‚¬¬ Es regnet' betrachtet! Aus den Erklärungen von ‚Es regnet' und ‚¬' lässt sich ableiten, dass ‚¬¬ Es regnet' an genau den Raumzeitstellen wahr ist, an denen es regnet. Entsprechend dieser Bestimmung ist es also, wann immer es regnet, korrekt, eine Äußerung von ‚¬¬ Es regnet' zu bejahen und inkorrekt sie zu verneinen. Angenommen nun, dass das Verwendungsverzeichnis der Situationssprache durch das Hinzufügen der Regel „‚¬¬p" ist äquivalent zu „¬p"' in *inkohärenter* Weise erweitert werde. Durch Bezug auf diese Bestimmung lässt sich ableiten, dass ‚¬¬ Es regnet' an Raumzeitstellen, an denen es regnet, falsch ist, so dass es in diesem Fall korrekt wäre eine entsprechende Äußerung zu verneinen und inkorrekt sie zu bejahen. Die Konsequenz, welche sich aus Annahme der mit der üblichen Erklärung von ‚¬' unvereinbaren Regel „‚¬¬p" ist äquivalent zu „¬p"' ergibt, besteht also darin, dass sich in bestimmten Fällen sowohl das Bejahen als auch das Verneinen einer Äußerung rechtfertigen bzw. kritisieren lassen. Da es in einem solchen Fall also keine eindeutig richtige Reaktion auf die fragliche Äußerung gibt, ist die Rede vom Praktizieren des Entscheidungsspiels, nicht mehr wohldefiniert, und das Spiel damit in diesem Sinn aufgehoben. Damit in einem solchen Fall überhaupt eine Handlungsweise als Praktizieren des Spiels gelten kann, könnte man allein die Rechtfertigungs*möglichkeit* als hinreichend für die Korrektheit der entsprechenden Handlung betrachten, so dass also im geschilderten Fall sowohl das Bejahen als auch das Verneinen von ‚¬¬ Es regnet' bei Regenwetter als richtig gelten müsste. Diese Modifikation würde allerdings eine substantielle Veränderung des Spiels darstellen. Denn Bejahen und Verneinen können nicht mehr als Gegensätze aufgefasst werden, insofern beide Handlungsweisen auch simultan zulässig sein können. Es könnte also nicht mehr darauf bestanden werden, dass, wann immer ein Sprecher bejaht, was ein Anderer verneint, nur einer von Beiden Recht haben kann.

Was durch die Inkohärenz eines Systems von Verwendungsregeln ausgeschlossen wird, ist also nicht die Möglichkeit der Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, sondern die Möglichkeit, Handlungen in eindeutiger Weise daraufhin zu bewerten, ob sie mit den fraglichen Regeln in Einklang stehen. Die Kohärenz von Verwendungsregeln ist eine Bedingung dafür, dass durch diese Regeln ein Sprachspiel – bzw. ein Sprachspiel bestimmter Art – definiert werden kann.

3.3 Wie bereits in Abschnitt 2.2 bemerkt wurde, steht die in Abschnitt 2.1 entwickelte Konzeption analytischer Wahrheit der Auffassung der logischen Positivisten und insbesondere der Auffassung Carnaps nahe. Auch nach Carnap ist eine Aussage analytisch wahr, wenn sie nicht aufgrund der Wirklichkeitsbeschaffenheit, sondern allein aufgrund ihrer Bedeutung wahr ist. Was eine Aussage bedeutet, ist durch ihre Bedeutungserklärung bzw. durch die Bedeutungserklärungen ihrer Teilausdrücke festgesetzt. Und da die Wahrheit tautologischer Aussagen also bereits allein durch Festsetzungen oder auch Konventionen solcher Art bestimmt ist, könnte man mit gewissen Recht sagen, tautologische – also analytisch wahre – Aussagen seien *per Konvention* wahr. Der in 2.1 eingeführten Unterscheidung zwischen begrifflich-tautologischen und wahrheitsfunktional-tautologischen Aussagen entspricht nicht nur bei Carnap, sondern in der modernen Logik im Allgemeinen eine Unterscheidung zwischen begrifflich wahren und logisch wahren Aussagen. Nach Carnap sind logisch wahre Aussagen dadurch charakterisiert, dass sie allein aufgrund der Bedeutung ihrer logischen Teilausdrücke (und deren Art der Verknüpfung) wahr sind (vgl. Carnap 1965, S. 222). Dass eine Aussage logisch wahr, ist demnach gleichbedeutend damit, dass ihre Wahrheit nicht nur unabhängig von der Wirklichkeitsbeschaffenheit ist, sondern auch von der Bedeutung der (atomaren) Prädikate und Namen, aus denen sie gebildet ist.

Bekanntermaßen ist Carnaps Auffassung begrifflicher und logischer Wahrheit von Quine kritisiert worden. Nach Quine können logisch wahre Aussagen zwar von anderen Aussagen unterschieden werden. Es sei jedoch unangemessen logische Wahrheit als Wahrheit aufgrund von Bedeutungen oder als Wahrheit per Konvention zu charakterisieren, da sich Charakterisierungen dieser Art bei genauerer Betrachtung als unverständlich erweisen würden. Unter Anderem aus diesem Grund sei es unmöglich, begriffliche von empirischen Wahrheiten zu unterscheiden. Quines Argumente gegen die Möglichkeit der Unterscheidung begrifflicher und empirischer

Wahrheiten sind bereits ausführlich diskutiert und zu Recht zurückgewiesen worden (vgl. z.B. Glock 2003, Kap. 3). Aus diesem Grund soll an dieser Stelle lediglich Quines Definition logischer Wahrheit sowie seine auf diesen Begriff bezogenen Thesen diskutiert werden. Hierfür soll zunächst noch in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass auch Quines eigene Definition logischer Wahrheit nur dahingehend verstanden werden kann, dass eine Aussage genau dann logisch wahr ist, wenn sie allein aufgrund der Bedeutung der logischen Zeichen wahr ist. Quines Einwände gegen diese Auffassung logischer Wahrheit sollen dann im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

In (1970, S. 50) schlägt Quine folgende Definition logischer Wahrheit vor: eine Aussage ‚p' ist genau dann logisch wahr, wenn sowohl ‚p' selbst als auch jede andere Aussage wahr ist, welche aus ‚p' durch die Substitution von Formeln für Prädikate in ‚p' resultiert.[5] – Im Folgenden sei der bei solchen Substitutionen unveränderliche Aussageteil jeweils als Substitutionsradikal bezeichnet. – In modernen Logikbüchern finden sich typischerweise ähnliche, wenn auch nicht identische Formulierungen. So wird oftmals definiert, dass einen Aussage ‚p' genau dann ‚logisch wahr' genannt werden soll, wenn ‚p' nicht nur bei der unterstellten, sondern bei jeder Interpretation – also bei jeder Bedeutungserklärung – der in ‚p' enthaltenen Prädikate wahr ist. Man kann also sagen, dass logische Wahrheit in der modernen Logik als interpretations- bzw. erklärungsinvariante Wahrheit, bei Quine hingegen als substitutionsinvariante Wahrheit definiert wird. Die Äquivalenz dieser beiden Erklärungen ist nicht offensichtlich und auch nicht bedingungslos gegeben. Für die folgenden sich zumeist auf beide Erklärungen beziehenden Überlegungen wird es auf diese Äquivalenz jedoch nicht ankommen. Die folgenden Untersuchungen werden sich zwar primär an Quines Formulierung orientieren. Es wird jedoch verschiedentlich auch darauf hingewiesen werden, wie bestimmte Überlegungen gegebenenfalls auf die in der Logik übliche Definition übertragen werden können.

Wie jede analytische Definition kann auch Quines Definition logisch wahrer Aussagen in eine entsprechende Wahrheitsbedingungsangabe übertragen werden. So ist entsprechend Quines Definition eine Aussage der Form ‚„p" ist logisch wahr' genau dann wahr, wenn sowohl ‚p' selbst als auch jede andere Aussage wahr ist, welche aus ‚p' durch die Substitution von Formeln für Prädikate in ‚p' resultiert. Um diese Wahrheitsbedingungsangabe bzw. die entsprechende Definition zu verstehen, muss, wie immer, nach der *Verifikationsmethode* gefragt werden, die sie kodifiziert. Die aus Quines Definition abgeleitete Formulierung der Wahrheitsbedingungen legt es nahe, die entsprechende Verifikationsregel wie folgt zu beschreiben:

[5] Anstatt von Formel und Prädikaten spricht Quine von Sätzen und einfachen Sätzen.

> „„p“ ist logisch wahr‘ wird dadurch verifiziert, dass – nicht nur ‚p‘ selbst, sondern – jede Aussage verifiziert wird, welche aus ‚p‘ durch die Substitution von Formeln für Prädikate in ‚p‘ resultiert.

Nun kann jedoch normalerweise davon ausgegangen werden, dass die Substitutionsklasse, auf welche hierbei Bezug genommen wird, *unbeschränkt* ist. So gibt es im Fall entsprechend reicher Sprachen unendlich viele Aussagen, durch welche z.B. ‚Es regnet‘ in ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet‘ ersetzt werden kann. Ist dies der Fall, so ist eine Verifikation all dieser Aussagen begrifflich unmöglich ist.[6] Und dass es sich hierbei um eine begriffliche – im Gegensatz etwa zu einer physikalischen – Unmöglichkeit handelt, bedeutet, dass der für die Verifikationsbeschreibung vorgesehene Ausdruck ‚jede Aussage verifizieren, welche aus der Substitution von Formeln für Prädikate in „p“ resultiert‘ nicht eine *undurchführbare* Handlungsweise, sondern so weit überhaupt *keine* Handlungsweise beschreibt und daher sinnlos ist.

Quines Formulierung der Definition logischer Wahrheit ist also zumindest anfechtbar. Denn insofern die aus ihr ableitbare Formulierung der Verifikationsbeschreibung sinnlos ist, ist unklar, wie diese Definition zu verstehen ist. Wenn man Quines Formulierung wörtlich nimmt, dann könnte die Aussage ‚„Es regnet ∧ ¬ es regnet“ ist logisch wahr‘ bestenfalls als Ausdruck einer Art Naturgesetzes gedeutet werden, dass so lang als wahr gelten kann, bis ein Gegenbeispiel – also ein falsches Substitutionsresultat – bekannt ist. Doch was Quine damit sagen will, dass eine Aussage logisch wahr ist, ist wohl kaum, dass falsche Substitutionsresultate zwar bisher nicht bekannt sind, sich aber eventuell noch finden lassen. Was er sagen will (bzw. muss), ist wohl vielmehr, dass sich das Finden solcher Gegenbeispiele – anders als im Fall eines Naturgesetzes – logisch ausschließen lässt. Gemeint ist also eigentlich nicht, dass jedes Substitutionsresultat wahr ist, sondern dass jedes Substitutionsresultat wahr sein *muss*. Und das bedeutet, dass allein daraus, dass eine Aussage aus dem Substitutionsradikal gebildet ist, darauf geschlossen werden kann, dass sie wahr ist. So darf angenommen werden, dass damit, dass z.B. jedes Substitutionsresultat von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet‘ wahr ist, gemeint ist, dass stets allein daraus, dass eine Aussage durch die entsprechende Wahrheitsfunktion ‚$p \vee \neg p$‘ gebildet ist, darauf geschlossen werden kann, dass sie wahr ist.

Dass der Umstand, durch das Substitutionsradikal gebildet zu sein, in diesem Sinn der Grund für die Wahrheit entsprechender Aussagen ist, ist nun seinerseits nur so zu verstehen, dass bereits der Beitrag des Substitutionsradikals zu den Wahrheitsbedingungen der entsprechenden

[6] Im Prinzip ist hierbei noch eine zweite Form der Unbeschränktheit involviert, insofern es auch unbeschränkt viele Raumzeitstellen gibt, an denen die fraglichen Aussagen zu verifizieren wären. Von dieser Schwierigkeit soll hier aber abgesehen werden.

Substitutionsresultate, diese als wahr bestimmt. Das bedeutet, dass zumindest bei unbeschränkter Substitutionsklasse die Rede davon, dass jedes Substitutionsresultat wahr ist, nur so zu verstehen ist, dass jedes Substitutionsresultat aufgrund der Bedeutung des Substitutionsradikals wahr ist. Substitutionsinvariante Wahrheit ist also keine durch fallweise Verifikationen zu bestätigende *Naturtatsache*, sondern eine aus dessen Bedeutungserklärung abzuleitende *Verwendungsregel* des Substitutionsradikals. Denn *nur* eine Bedeutungsanalyse des Substitutionsradikals kann zeigen, dass es keine falschen Substitutionsresultate zulässt.

Die soeben geschilderte Argumentation lässt sich auch auf die Konzeption logischer Wahrheit als interpretationsinvarianter Wahrheit übertragen. Wenn unendlich viele Prädikatinterpretationen und damit unendlich viele Interpretationen der fraglichen Aussage ‚p' in Betracht kommen sollen, dann gibt es nicht so etwas, wie ‚für jede Prädikatinterpretation feststellen, ob „p" wahr ist'. Auch in diesem Fall kann nur von der Feststellung die Rede sein, dass sich die Wahrheit von ‚p' allein aus den Bedeutungserklärungen der logischen Teilausdrücke und also unabhängig von den Erklärungen der Prädikate ableiten lässt. Dass eine Aussage unter jeder Prädikatinterpretation wahr ist, kann also ebenfalls nur bedeuten, dass bereits die Bedeutung ihrer logischen Teilausdrücke bestimmt, dass sie unter jeder Interpretation ihrer Prädikate wahr sein muss. Und dass dies in der Logik tatsächlich gemeint ist, zeigt der Blick auf die Art und Weise, in der entsprechende Aussagen dort verifiziert werden. Denn natürlich wird auch in der Logik die logische Wahrheit etwa der Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' nicht durch Verifikationen irgendwelcher Aussagen der Form ‚p∨¬p' festgestellt. Vielmehr wird durch die Feststellung der Konstanz von ‚p∨¬p', also durch eine Bedeutungsanalyse des Substitutionsradikals bewiesen, dass jede Aussage dieser Form wahr sein muss.

Zum Abschluss dieses Abschnitts seien noch zwei weitere Bemerkungen zu Quines Definition logischer Wahrheit gemacht, welche sich mit leichten Modifikationen auch auf die Definition logischer Wahrheit als interpretationsinvariante Wahrheit übertragen ließen. Zuerst soll ein möglicher Einwand gegen die Behauptung diskutiert werden, dass sich substitutionsinvariante (oder auch interpretationsinvariante) Wahrheit nur als Wahrheit aufgrund der Bedeutung des Substitutionsradikals verstanden werden kann. Dieser Einwand könnte in folgender Weise durch Bezug auf die in Abschnitt 2.5 erläuterte Möglichkeit motiviert werden, *verschiedene* Kriterien für die Verifikation ein und derselben Aussagen zu verwenden. Ob ein Dreieck gleichwinklig ist, kann bekanntermaßen dadurch festgestellt, dass festgestellt, ob es gleichseitig ist. Und obwohl in einem solchem Fall Gleichseitig als Kriterium (Beweis) für Gleichwinkligkeit benutzt wird, muss aus diesem Grund natürlich nicht der Ausdruck ‚gleichwinkliges Dreieck' durch die Kriterien der Dreieckigkeit und der Gleichseitigkeit definiert werden. In Analogie hierzu könnte man argumentieren wollen, dass der Hinweis darauf, dass

Logiker die logische Wahrheit einer Aussage durch die Konstruktion entsprechender semantischer Beweise feststellen, nur zeige, dass sie die Möglichkeit eines solchen Beweises und nicht die Wahrheit aller Substitutionsresultate einer Aussage als Kriterium logischer Wahrheit benutzen. Man könnte aber dennoch die logische Wahrheit einer Aussage durch das Kriterium der Wahrheit aller Substitutionsresultate definieren, da, wie es scheinen könnte, dieses Kriterium mit dem der Möglichkeit eines entsprechenden Beweises in derselben Weise zusammenhängt, wie die Gleichwinkligkeit und die Gleichseitigkeit eines Dreiecks.

Zur Entkräftung dieses Einwands ist also zeigen, dass – und inwiefern – diese beiden Fälle nicht analog sind. Die Ausdrücke ‚gleichwinklig' und ‚gleichseitig' bestimmen in der Tat zwei verschiedene Verifikationsmethoden – basierend auf der Winkel- bzw. der Längenmessung –, von denen sich zeigen lässt, dass ihre Anwendung auf Dreiecke in jedem Fall zu ein und demselben Ergebnis führen muss. Daher können in Bezug auf die Verwendung des Ausdrucks ‚gleichwinkliges Dreieck' zwei Kriterien unterschieden werden: das (partiell) definierende Kriterium der Gleichwinkligkeit sowie das abgeleitete Kriterium der Gleichseitigkeit. Und da die Anwendung beider Kriterien im Fall von Dreiecken stets zu demselben Ergebnis führen muss, ist es möglich, bald das Eine, bald das Andere zu benutzen. Im Fall der logischen Wahrheit einer Aussage ist jedoch die Konstruktion des semantischen Beweises *kein alternatives* Verfahren zur fallweisen Verifikation aller Substitutionsresultate; es ist vielmehr das *einzige* Verifikationsverfahren, von dem in diesem Zusammenhang die Rede sein kann. Deshalb zeigt eine entsprechende Beweiskonstruktion auch nicht, welches das Ergebnis der Feststellung sein muss, ob alle Substitutionsresultate einer Aussage wahr sind. Denn wenn die Rede von einem solchen Feststellen überhaupt einen Sinn haben soll, dann eben den von der Konstruktion eines entsprechenden Beweises. Es gibt also nicht zwei verschiedene Kriterien für die logische Wahrheit einer Aussage: dass alle Substitutionsresultate wahr sind einerseits; und dass sich die Wahrheit eines beliebigen Substitutionsresultats aus der Bedeutungserklärung des Substitutionsradikalt ableiten lässt andererseits. Sondern es gibt bestenfalls zwei verschiedene Ausdrücke für ein und dasselbe Kriterium, nämlich den Ausdruck ‚jedes Substitutionsresultate ist wahr' sowie den Ausdruck ‚jedes Substitutionsresultat muss wahr sein'.[7]

Eine weitere durch Quines Definition logischer Wahrheit aufgeworfene Frage betrifft das Verhältnis vom *Allgemeinen* zum *Besonderen* in der Logik. Quines Formulierung suggeriert, dass es für die Feststellung, ob eine bestimmte Aussage nicht nur wahr, sondern logisch wahr ist, wesentlich ist, auch die Wahrheitswerte anderer Aussagen – nämlich der entsprechenden Substitutionsresultate – zu berücksichtigen. Logische Wahrheit erscheint also als etwas wesentlich

[7] Auf diese Argumentation wird im Rahmen der Diskussion von Beweisen arithmetischer Gesetze in Abschnitt 7.3 noch einmal zurückzukommen sein.

Allgemeines, insofern, ob eine Aussage logisch wahr ist, nicht von ihr allein, sondern auch von den Wahrheitswerten anderer Aussagen abhängt. Man könnte meinen, diese Auffassung werde durch Blick auf das Vorgehen in der Logik gestützt, da dort die logische Wahrheit einer Aussage durch die Konstruktion eines *schematischen* Beweis bewiesen wird; also eines Beweises, welcher nicht nur die Wahrheit der fraglichen Aussage selbst, sondern auch die Wahrheit all ihrer Substitutionsresultate beweist. Denn wenn etwa durch Verweis auf die Konstanz der Wahrheitsfunktion ‚p∨¬p' bewiesen wird, dass ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' logisch wahr ist, so zeigt dieser Beweis unmittelbar auch, die logische Wahrheit aller anderen durch ‚p∨¬p' gebildeten Aussagen.

Hierzu ist allerdings zu bemerken, dass dieser schematische Beweis dafür, dass eine beliebige durch ‚p∨¬p' gebildete Aussage – also eine Instanz dieses Schemas – wahr sein muss, die logische Wahrheit einer bestimmten Aussage nur insofern beweist, als er das Schema eines entsprechenden *individuellen* Beweises ist. Und natürlich kann, wie in Abschnitt 2.1. auch geschehen, zunächst der individuelle Beweis entwickelt werden, um dann aus diesem durch eine entsprechende Schematisierung den allgemeinen Beweis zu konstruieren. Diese Überlegung zeigt, dass für die logische – im Gegensatz zur faktischen – Wahrheit eine Aussage nicht die Möglichkeit eines entsprechenden schematischen – und in diesem Sinn allgemeinen – Beweises, sondern die Möglichkeit eines individuellen Beweises und damit die Beweisbarkeit überhaupt wesentlich ist. Entscheidend ist, dass man durch einen Beweis, dessen Prämissen ausschließlich semantischer (und nicht empirischer) Art sind, zeigen kann, dass die fragliche Aussage wahr ist. Um zu erkennen, dass z.B. ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' logisch wahr ist, muss man also durchaus nicht *zuerst* erkennen, dass *alle* entsprechenden Substitutionsresultate wahr sind. Vielmehr lässt sich, dass ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' logisch wahr ist, auch individuell, also ohne die Berücksichtigung der Wahrheitswerte eventueller Substitutionsresultate erkennen.

3.4 Sowohl in (1970) als auch in (1936) argumentiert Quine dafür, dass die logische Wahrheit von Aussagen nicht als Wahrheit allein aufgrund von Bedeutungen oder Sprachkonventionen verstanden werden kann. Wie aus der unmittelbar folgenden Diskussion von Quines Argument aus (1970) erhellen wird, ist es zunächst angebracht, nochmals die im Rahmen dieser Arbeit befürwortete Grundidee Carnaps zu wiederholen. Insofern, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, davon abhängt, was sie bedeutet, ist *jede* wahre Aussage *auch* aufgrund ihrer Bedeutung wahr. Die Besonderheit einer analytisch wahren Aussage besteht darin, dass sie *allein* aufgrund der Bedeutung ihrer Teilausdrücke – und also unabhängig von Wirklichkeitsbeschaffenheit – wahr ist. In diesem Sinn sind insbesondere logisch wahre Aussagen allein aufgrund der Bedeutung ihrer logischen Teilausdrücke wahr.

Zwar spricht auch Quine in (1970) bei der Charakterisierung dieser Auffassung logischer Wahrheit zunächst von ‚Wahrheit allein aufgrund der Bedeutung' (vgl. S. 95). Bei der Formulierung seines Einwands lässt er dann jedoch den Ausdruck ‚allein' fallen und geht davon aus, ‚logisch wahr' solle einfach ‚wahr aufgrund der Bedeutung' bedeuten (S. 96). In Bezug auf diese Formulierung argumentiert Quine dann wie folgt. Dass eine Aussage ‚p' aufgrund von x wahr ist, bedeutet so viel wie: ‚p' wird von Aussagen über x impliziert. Doch da logische wahre Aussagen von beliebigen Aussagen, also von Aussagen über alles Mögliche impliziert werden, könnte in der Klausel ‚wahr aufgrund der Bedeutung' der Ausdruck ‚Bedeutung' durch alle möglichen Ausdrücke ersetzt werden. Da eine logische wahre Aussage ‚p' etwa auch von Aussagen über das Wetter impliziert wird, könnte man also genauso gut sagen, ‚p' sei aufgrund des Wetters wahr.

Quines Einwand verfehlt jedoch sein Ziel, da der Gebrauch des Ausdrucks ‚allein' in der ursprünglichen Formulierung ‚wahr allein aufgrund der Bedeutung' natürlich entscheidend ist. Denn dass ‚p' *allein* aufgrund von x wahr ist, bedeutet, dass die Wahrheit von ‚p' unabhängig von den Wahrheitswerten von Aussagen ist, die x *nicht* betreffen. Und das wiederum bedeutet, dass ‚p' keine Aussagen impliziert, die etwas von x verschiedenes betreffen. Wenn also gesagt wird, eine Aussage ‚p' sei allein aufgrund ihrer Bedeutung wahr, dann ist gemeint, dass ‚p' keine Aussagen impliziert, welche nicht die Bedeutung von ‚p' betreffen; also insbesondere keine Aussagen, welche das Wetter oder überhaupt die Wirklichkeitsbeschaffenheit betreffen.

Auch vor der Diskussion von Quines in (1936) formulierten Einwänden gegen die Rede davon, dass eine Aussage per Konvention wahr sei, muss zunächst wieder untersucht werden, wie Quine selbst diese Redeweise versteht. Dass eine Aussage ‚p' allein per Konvention wahr ist, bedeutet nach Quine, dass ‚p' von einer geeigneten Konventionsformulierung impliziert wird. Wie aus seinen Ausführungen ersichtlich wird, denkt Quine bei den fraglichen Konventionsformulierungen jedoch nicht an *Bedeutungserklärungen* der Teilausdrücke von ‚p'. Vielmehr hat er hierbei einen auf ‚p' bezogenen *Tautologiesatz* im Sinn. Das bedeutet also, dass es sich nach Quine etwa bei den Konventionsformulierungen, aus denen die Wahrheit von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' folgen soll, nicht um die Bedeutungserklärungen von ‚Es regnet', ‚∨' und ‚¬', sondern um den Tautologiesatz ‚„Es regnet ∨ ¬ es regnet" ist (logisch) wahr' handeln soll. Wie Quine zu Recht bemerkt, lassen sich in vielen Sprachen unendlich viele logisch wahre Aussagen bilden. Sollen alle diese Aussagen durch entsprechende Konventionsformulierungen erfasst werden, so können diese Formulierungen also nur allgemeiner Art sein. So könnte also etwa die ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' entsprechende Konventionsformulierung wie folgt lauten: Wenn ‚p' in ‚p∨¬p' durch eine Aussage ersetzt wird, dann ist die resultierende Aussage wahr.

Quines erster Einwand gegen diese Konzeption lautet nun, dass die *Kommunikation* der fraglichen Konventionen das Verständnis logischer Zeichen bereits voraussetze. Demnach wäre eine Erklärung der Bedeutung logischer Zeichen durch die Angabe entsprechender Tautologiesätze insofern zirkulär, als solche Angaben nur verstehe könne, wer zumindest bereits einige elementare logische Zeichen versteht. Die Grundlage für Quines zweiten Einwand bildet die folgende Überlegung. Das *Ableiten* logischer Wahrheiten aus entsprechenden allgemeinen Konventionen setzt insofern bereits bestimmte logische Wahrheiten voraus, als eine Ableitung nur dann gültig ist, wenn das die Ableitung formulierende Konditional logisch wahr ist. So könnte man zwar etwa wie folgt von (1) und (2) auf (3) schließen:

> (1) Wenn ‚p' in ‚p∨¬p' durch eine Aussage ersetzt wird, dann ist die resultierende Aussage wahr.
>
> (2) ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' resultiert aus der Ersetzung von ‚p' durch ‚Es regnet' in ‚p∨¬p'.
>
> (3) ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' ist wahr.

Aber die Geltung dieses Schlusses beruht seinerseits auf der logischen Wahrheit des Konditionals ‚Wenn (1) und (2), dann (3)'. Daher lautet Quines Einwand, dass man zumindest von den logisch wahren Aussagen, die aus Tautologiesätzen nicht abgeleitet werden können, ohne dass ihre logische Wahrheit bereits vorausgesetzt wird, nicht sagen könne, dass sie (allein) per Konvention wahr seien. Aus eben diesem Grund könne man nicht sagen, dass die Logik im Allgemeinen aus Konventionen folge, insofern, wie Quine sagt, bereits Logik nötig sei, um Logik aus Konventionen zu folgern.

Auch Quines Einwände aus (1936) sollen nun durch eine nähere Erläuterung dessen entkräftet werden, wie die zu Beginn von Abschnitt 3.3 eingeführte der Rede von ‚Wahrheit per Konvention' zu verstehen ist. Zunächst muss zwischen der Bedeutungserklärung einer logisch wahren Aussage – bzw. den Bedeutungserklärungen ihrer Teilausdrücke – und dem auf die Aussage bezogenen Tautologiesatz unterschieden werden. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, ist es zwar möglich, die Bedeutung bestimmter Ausdrücke *implizit* durch entsprechende Tautologie- oder Implikationssätze zu erklären, insofern durch diese Sätze eine entsprechende explizite Erklärung in eindeutiger Weise bestimmt werden kann.[8] Im Normalfall wird der Zusammenhang zwischen Bedeutungserklärungen und Tautologiesätze jedoch nicht in der Weise

[8] Wie gesehen, kann in diesem Sinn ‚–' durch die Bestimmungen, dass ‚– – p' sowohl zu ‚–p' als auch zu ‚p' äquivalent ist, in diesem Sinn implizit erklärt werden, da nur die triviale Wahrheitsfunktion diesen beiden Bedingungen genügt.

hergestellt, dass, was ein Ausdruck bedeutet, durch die Angabe von Tautologiesätzen erklärt wird. Vielmehr werden Tautologiesätze aus den Bedeutungserklärungen der Teilausdrücke derjenigen Aussagen abgleitet, auf welche sie sich beziehen. So ist die Bedeutung der Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' durch die Bedeutungserklärungen ihrer Teilausdrücke ‚Es regnet', ‚¬' und ‚∧' erklärt. Und aus diesen Erklärungen lässt sich dann die Konstanz der komplexen Wahrheitsfunktion ‚p∨¬p' und damit der auf die Aussage bezogene Tautologiesatz „‚Es regnet ∨ ¬ es regnet" ist wahrheitsfunktional-tautologisch' ableiten.

Die Bedeutungserklärungen der Teilausdrücke einer Aussage erklären, wie die Aussage verifiziert wird. Sie bestimmen, worin die entsprechenden Verifikationsschritte bestehen; also z.B. welche Paradigmen hierfür in welcher Weise zu verwenden sind. Und dass eine Aussage analytisch ist, sollte nach Abschnitt 2.2 gleichbedeutend damit sein, dass Wirklichkeitsuntersuchungen keinen erforderlichen Schritt in der Verifikation der fraglichen Aussage bilden. So wurde an besagter Stelle unter Anderem dargelegt, dass etwa die Verifikation von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' keinerlei Wirklichkeitsuntersuchungen erfordert. Wenn zu Beginn von Abschnitt 3.3 davon gesprochen wurde, dass tautologische Aussagen per Konvention wahr seien, dann waren mit den semantischen Konventionen, von denen allein die Wahrheit tautologischer Aussagen abhängen, die durch die Bedeutungserklärungen bestimmten Verifikationsregeln dieser Aussagen gemeint. Dass ‚p' per Konvention wahr ist, sollte also nicht bedeuten, dass die Verifikation von ‚p' darin besteht, dass ‚p' aus einer Konventionsformulierung abgeleitet wird, welche sagt, dass ‚p' wahr ist. Vielmehr sollte es bedeuten, dass die Verifikationsregel von ‚p', deren Befolgung ‚p' als wahr erweist, keine Wirklichkeitsuntersuchungen vorsieht. Es wäre also eventuell angebracht, auch in Bezug auf die Rede von konventioneller Wahrheit stets den Ausdruck ‚Wahrheit *allein* per Konvention' zu gebrauchen. Denn der Wahrheitswert jeder Aussage ist abhängig von den Regeln bzw. Konventionen für die Verwendung ihrer Teilausdrücke. Und die Besonderheit der logisch wahren Aussagen besteht, wie erläutert, darin, dass ihre Wahrheit allein von den Konventionen für die Verwendung logischer Zeichen abhängt.

Bevor auf Quines Einwände zurückgekommen werden soll, sei an dieser Stelle noch auf eine Möglichkeit dafür hingewiesen, wie Tautologiesätze für die Verifikation der Aussagen, auf welche sie sich beziehen, verwendet werden könnten. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert wurde, kann die Erkenntnis, dass eine bestimmte Aussage ‚p' tautologisch ist, durch einen entsprechenden Tautologiesatz im Verwendungsverzeichnis festgehalten werden. Ist die geschehen, so ist es fortan möglich, den Wahrheitswert von ‚p' durch Bezug auf den fraglichen Eintrag im Tautologieverzeichnis anstatt durch die Befolgung ihrer Verifikationsregel zu ermitteln. Die Erzeugung und Entscheidung von ‚p' könnte sich also auch so gestalten, dass ‚p' nach einen

Verweis auf den Eintrag oder nach dessen Zitat geäußert bzw. bejaht wird. Und sollten im Tautologieverzeichnis formale Tautologiekriterien in der Art von (1) formuliert sein, dann besteht die Prüfung, ob ‚p' im Tautologiekapitel verzeichnet ist, in der Feststellung, ob ‚p' diesen formalen Kriterien genügt. Es wäre im Übrigen möglich, die Ermittlung der Wahrheitswerte von Aussagen im Allgemeinen derart zu modifizieren, dass, um festzustellen, ob eine beliebige Aussage ‚p' wahr ist, jeweils zuerst geprüft wird, ob ‚p' im Tautologiekapitel verzeichnet ist. Wenn nicht, dann folgt die durch die Bedeutungserklärung von ‚p' bestimmte Verifikation von ‚p'. Wenn ‚p' dagegen tatsächlich im Tautologiekapitel verzeichnet ist, gilt ‚p' damit als wahr und kann daraufhin unmittelbar geäußert bzw. bejaht werden. Sind alle tautologischen Aussagen (einer bestimmten Sprache) in dieser Weise verzeichnet, so würde deren Wahrheit also jeweils allein anhand ihrer Form und nicht durch die Befolgung ihrer Verifikationsregel festgestellt werden. Und nun kann, wie es scheint, gesagt werden, dass der Vorgang, den Quine mit dem Folgern einer logischen Wahrheit aus Konventionen meint, nicht der eigentlichen Verifikation einer logisch wahren Aussage entspricht, sondern eher der Feststellung, dass eine Aussage als Tautologie verzeichnet ist. Denn das Folgern von ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' aus (1) kann nicht als das Befolgen der durch ‚¬', ‚∨' und ‚Es regnet' bestimmten Verifikationsregel dieser Aussage aufgefasst werden, sondern nur als die Feststellung, dass diese Aussage von der in (1) gekennzeichneten Form ist.

Nun zurück zu Quines Einwänden! Bei der Diskussion dieser Einwände muss nun zwischen der von Quine anvisierten und der im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagenen Deutung des Ausdrucks ‚wahr per Konvention' unterschieden werden. Quines erster Einwand, wonach die Formulierung semantischer Konventionen für die elementaren logischen Zeichen diese – oder gleichbedeutende – Zeichen selbst gebraucht, lässt sich zwar auch dann erheben, wenn unter den Konventionsformulierungen nicht Tautologiesätze, sondern metasprachliche Bedeutungserklärungen verstanden werden. Wie bereits in Abschnitt 1.4 erläutert wurde, ist diese Form der Zirkularität jedoch unproblematisch, solange die durch die Konventionsformulierungen dargestellten Regeln auch dadurch kommuniziert werden können, dass deren Befolgung anhand von Beispielen vorgeführt wird.

Quine zweiter Einwand, wonach Logik nötig ist, um Logik aus Konventionen abzuleiten, setzt nun wesentlich seine eigene Interpretation der Rede von ‚Wahrheit per Konvention' voraus. Wie zuvor erläutert, sollte mit der Charakterisierung logischer Wahrheiten als wahr per Konvention, jedoch nicht behauptet werden, dass jede logisch wahre Aussage irgendwoher abgeleitet werden könne, ohne hierbei bestimmte Aussagen als logisch wahr vorauszusetzen. Gemeint war vielmehr, dass man von einer logisch wahren Aussagen ‚p' insofern sagen kann, dass sie per Konventionen wahr sei, als in diesem Fall bereits die Bedeutungen der in ‚p' enthaltenen logischen Zeichen – also die entsprechenden semantischen Konventionen – ‚p' als wahr bestimmen. Bei dieser Deutung von ‚wahr per Konvention' ergibt sich aus der Existenz unendlich vieler logischer Wahrheiten kein Problem. Aufgrund der Möglichkeit, Wahrheitsfunktionen zu iterieren, bestimmen die Bedeutungserklärungen endlich vieler Wahrheitsfunktionen zwar die Wahrheitsbedingungen und damit die Verifikationsregeln unendlich vieler Aussagen, von denen wiederum unendlich viele wahrheitsfunktional-tautologisch und also logisch wahr sind. Allerdings zeigt sich, ob eine wahrheitsfunktionale Aussage ‚p' wahrheitsfunktional-tautologisch ist, in ihrer Verifikation; nämlich darin, ob diese bereits nach der Konstruktion der Wahrheitswerttabelle abgebrochen werden kann oder nicht. Aber bei dieser Verifikation wird nicht bereits die logische Wahrheit irgendeiner Aussage vorausgesetzt. Das Einzige, was hierbei vorausgesetzt wird, sind die Bedeutungserklärungen der Teilausdrücke der zu verifizierenden Aussage.

Aus Quines Darstellungen geht auch hervor, dass er seinen Einwand nicht auf die Verifikation logischer Aussagen bezieht, sondern auf Feststellungen derart, ob eine (gegebenenfalls logisch wahre) Aussage bestimmten formalen Kriterien genügt. Denn eine Feststellung dieser Art kann die Form eines Schlusses der von Quine anvisierten Art annehmen, in dem also – wie zuvor dargestellt – aus einer Formulierung eines formalen Tautologiekriteriums wie etwa (1) auf eine diesem Kriterium genügende Aussage – also etwa ‚Es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' – geschlossen wird. Und da die Gültigkeit solcher Schlüsse die logische Wahrheit entsprechender Konditionalaussage voraussetzt, ist auch Quines Hinweis darauf berechtigt, dass durch ein Verfahren dieser Art – also durch die Ableitung logisch wahrer Aussagen aus entsprechenden schematischen Tautologiesätzen – zumindest einige logisch wahre Aussagen nicht abgeleitet werden können, ohne dass deren logische Wahrheit bereits vorausgesetzt wird. Dennoch könnte sogar gegen dieses Argument der Einwand erhoben werden, dass die Prüfung, ob eine Aussage einem formalen Tautologiekriterium genügt nicht notwendigerweise die Form eines Ableitens annehmen müsse. So wäre es denkbar, dass etwa ‚Es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' ohne vorheriges Zitat von (1) allein auf der Grundlage eines Vergleichs mit dem in (1) angegebenen Schema ‚$p\vee\neg p$' geäußert wird. Und da die formale Prüfung, welche ‚Es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' als logisch wahr erweist, in diesem Fall nicht die Form eines Schlusses, sondern die eines Gestaltvergleichs zweier Ausdrücke annähme, würde hierbei auch nicht mehr die logischer Wahrheit irgendwelcher Aussagen vorausgesetzt werden.

Teil II
Semantische Analysen

4. Zahlaussagen

In diesem Kapitel soll die Verwendung von Aussagen über Anzahlen und Zahlengleichheit konkreter Gegenstände untersucht werden. Zu propädeutischen Zwecken werden hierfür in Abschnitt 4.1 zunächst die Semantik und die Logik von Aussagen über Äquivalenzrelationen zwischen konkreten Gegenständen skizziert. In den Abschnitten 4.2 bis 4.4 werden dann verschiedene – wenngleich äquivalente – Verifikationsmethoden für Zahlaussagen dargestellt und durch geeignete Wahrheitsbedingungsangaben kodifiziert. Hierbei wird sich zum einen zeigen, dass, semantisch betrachtet, keine der beiden meistdiskutierten Verifikationsmethoden des Zählens bzw. des Zuordnens von Gegenständen grundsätzlicher als die jeweils Andere ist. Zum anderen wird sich zeigen, dass es auch keine begrifflichen Prioritäten zwischen Anzahlaussagen und Zahlengleichheitsaussagen gibt. Die dann in Abschnitt 4.5 vorzunehmende Untersuchung von Hume Prinzip wird zeigen, dass die hieran von Waismann und Wittgenstein geübte Kritik nur teilweise berechtigt ist.

4.1 Bekanntermaßen haben Aussagen über die Zahlengleichheit und Anzahl von Begriffen eine analoge *Logik* wie Aussagen über Äquivalenzrelationen zwischen konkreten Gegenständen und den entsprechenden Äquivalenzeigenschaften. Wie sich in diesem Kapitel zeigen wird, lassen sich Zahlaussagen aus diesem Grund nach analogen Strategien erklären wie Aussagen über die Äquivalenzrelationen und Äquivalenzeigenschaften konkreter Gegenstände. Aus propädeutischen Zwecken sollen diese Erklärungsstrategien in diesem Abschnitt zunächst in ihrer Anwendung auf Aussagen letzterer Art dargestellt werden.

Im Folgenden stehe ‚q' jeweils für eine Äquivalenzrelation zwischen konkreten Gegenständen wie etwa die Farb- oder Längengleichheit. Die q entsprechenden *Äquivalenzprädikate* – also etwa Farb- oder Längenterme – seien durch ‚Q_i' notiert. Im Folgenden sei angenommen, dass sich verschiedene Äquivalenzprädikate ein und desselben Systems jeweils wechselseitig ausschließen. Diese Bedingung lässt sich wie folgt ausdrücken:

Für je zwei verschiedene ‚Q_i' und ‚Q_j' gilt: ‚a ist $Q_i \wedge$ a ist Q_j' ist kontradiktorisch.

Der grundlegende logische Zusammenhang zwischen dem Ausdruck der Äquivalenzrelation und den entsprechenden Äquivalenzprädikat kann in diesem Fall folgendermaßen dargestellt werden:

Für jedes ‚Q_i' gilt: ‚a_1 ist $Q_i \wedge$ a_1 ist q zu a_2' ist äquivalent zu , a_1 ist $Q_i \wedge$ a_2 ist Q_i'.

Diese Regel wird mitunter auch in der Weise ausgedrückt, dass man sagt, die ‚Q_i' seien *invariant* bezüglich ‚q'. Wie aus den folgenden Ausführungen hervorgehen wird, besteht hierin – also in diesen Invarianzregeln – die Grundlage für die wechselseitigen Erklärungen von Äquivalenzprädikaten und Ausdrücken für Äquivalenzrelationen.

Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit erläutert, können Farbterme durch Beispiele ihrer Anwendung erklärt werden. Diese Erklärung setzt also nicht bereits eine Erklärung des Ausdrucks ‚farbgleich' voraus. Vielmehr könnte dieser Ausdruck auf der Grundlage der Erklärungen der einzelnen Farbterme nach dem folgenden Schema erklärt werden:

‚q' trifft auf x_1 und x_2 zu $\Leftrightarrow$ Es gibt ein ‚Q_i' derart gibt, dass gilt: ‚Q_i' trifft sowohl auf x_1 als auch auf x_2 zu.

Gemäß einer solchen Erklärungen der Farbgleichheit, würde also, ob zwei Gegenstände ‚farbgleich' genannt werden können, in der Weise festgestellt werden, dass festgestellt würde, ob ein und derselbe Farbterm auf beide Gegenstände zutrifft.

Diese Strategie, ‚q' durch Bezug auf die ‚Q_i' zu erklären, ist allerdings dann ausgeschlossen, wenn die ‚Q_i' sich nicht unabhängig von ‚q' erklären lassen. So kann etwa der Ausdruck ‚gleichlang' nicht in dieser Weise erklärt werden, da Längenterme ihrerseits nur auf der Grundlage von bestimmten Längenbeziehungen – insbesondere der Beziehung der Längengleichheit – zu erklären sind. Stattdessen bietet sich zunächst die folgende Bestimmung als Erklärung der Längengleichheit an:

‚gleichlang' trifft auf x_1 und x_2 zu $\Leftrightarrow$ Wenn x_1 und x_2 aneinander liegen, dann decken sie einander wechselseitig.

Ob zwei Gegenstände ‚gleichlang' genannt werden können, würde hiernach also in der Weise festgestellt werden, dass die beiden Gegenstände zunächst aneinander gelegt werden, um daraufhin festzustellen, ob sie einander wechselseitig decken, oder ob einer von beiden den Anderen überdeckt. Hierbei ist zu bemerken, dass daraus, dass zwei Gegenstände einander wechselseitig decken, zwar deren Längengleichheit folgt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Denn anders als die Längengleichheit setzt die wechselseitige Deckung zweier Gegenstände deren Aneinanderliegen – d.h. also das Bestehen einer spezifischen Lagebeziehung – voraus. Längengleichheit, so könnte man sagen, besteht also nicht in der *tatsächlichen* wechselseitigen Deckung, sondern in der *Möglichkeit* der wechselseitigen Deckung.

Die Verwendung des Ausdrucks ‚gleichlang' gemäß der soeben angegebenen *Möglichkeitserklärung*, setzt voraus, dass die beiden Gegenstände, deren Längengleichheit es festzustellen gilt, zum Feststellungszeitpunkt an einen gemeinsamen Ort gebracht werden können. Hieraus ergeben sich zwei Beschränkungen. Zum einem lässt sich in dieser Weise keine Aussagen über die Längengleichheit zweier unbewegbarer Gegenstände machen, welche sich an verschiedenen Orten befinden. Zum anderen lassen sich keine Aussagen über die Längengleichheit von Gegenständen zu verschiedenen Zeitpunkten machen. Diese beiden, sich aus der räumlichen bzw. zeitlichen Distanz zweier Untersuchungsgegenstände ergebende Schwierigkeiten können nur in der Weise beseitigt werden, dass die beiden Gegenstände nicht unmittelbar miteinander, sondern jeweils mit einem dritten Gegenstand verglichen werden. Die Einführung eines Längenmaßstabs als vermittelndem Dritten ist also zwingend erforderlich. Ob x_1 und x_2 ‚gleichlang' genannt werden können, würde dann in der Weise festgestellt, dass der fragliche Längenmaßstab einmal an x_1 und einmal an x_2 angelegt würde. Und dabei gelten dann x_1 und x_2 genau dann als gleichlang, wenn sich ihre Längenverhältnisse zum Längenmaßstab als identisch erweisen.

Alternativ zu einem Längenmaßstab könnte im Prinzip auch ein *System* von Längenparadigmen verwendet werden. Die Feststellung der Längengleichheit zweier Gegenstände bestünde in diesem Fall in der Feststellung, ob es unter den verschiedenen Längenparadigmen ein Paradigma gibt, welches mit den beiden Untersuchungsgegenständen zur Deckung gebracht werden kann. Die Angabe der Zutreffensbedingungen von ‚gleichlang' müsste sich dementsprechend wie folgt gestalten:

‚gleichlang' trifft auf x_1 und x_2 zu $\Leftrightarrow$ Es gibt ein Längenparadigma m_i derart, dass gilt:
Wenn x_1 und m_i aneinander liegen, decken sie einander wechselseitig.
Wenn x_2 und m_i aneinander liegen, decken sie einander wechselseitig.

Angenommen, der Ausdruck einer Äquivalenzrelation ‚q' sei im zuvor geschilderten Sinn durch Bezug auf ein Maßstab bzw. ein Paradigmensystem erklärt. Auf dieser Grundlage könnten nun die entsprechenden Äquivalenzprädikate durch Bestimmungen der folgenden Art *analytisch* erklärt werden:

‚Q_i' bedeutet: ist q zu m_i.

Dementsprechend würde also gelten:

‚Q_i' trifft auf x zu ⇔ ‚ist q zu m_i' trifft auf x zu.

Ob ‚Q_i' auf einen Gegenstand x zutrifft, würde hiernach also in derselbe Weise festgestellt, in der auch festgestellt wird, ob ‚ist q zu m_i' auf x zutrifft; nämlich dadurch, dass x und m_i in der durch q bestimmten Weise miteinander verglichen werden. Wird in dieser Weise erklärt, dass ‚1 Meter lang' dasselbe bedeute wie ‚gleichlang wie das Urmeter', dann wird also, ob ‚1 Meter' auf einen Gegenstand x zutrifft, durch eine Längenvergleich von x und dem Urmeter festgestellt. Analog hierzu könnte man bestimmen, dass ‚1 Kilogramm schwer' dasselbe bedeute wie ‚gleichschwer wie das Urkilogramm'. In diesem Fall träfe ‚1 Kilogramm schwer' genau dann auf x zu, wenn gilt: wenn x und das Urkilogramm auf verschiedene Seiten eine Waage gelegt werden, bleibt diese im Gleichgewicht bleibt.

Wenn die Äquivalenzprädikate derart verwendet werden, dass ihr Zutreffen auf einen Gegenstand durch dessen Vergleich mit einem bestimmten Paradigma festgestellt wird, dann können die Äquivalenzprädikate auch unmittelbar in dieser Weise, also ohne Bezug auf den Ausdruck der Äquivalenzrelation erklärt werden. In diesem Sinn könnte also etwa Längenterme durch Bestimmungen der folgenden Art erklären:

‚Q_i' trifft auf x zu ⇔ Wenn x und m_i aneinander liegen, decken sie einander wechselseitig.

Es ist ferner zu bemerken, dass eine Erklärung von Farbaussagen nach der soeben dargestellten *Paradigmenstrategie* zwar nicht zwingend, aber doch möglich ist. Denn wie in Abschnitt 1.5 erläutert wurde, könnten natürlich auch Farbaussagen stets durch den Vergleich von Untersuchungsgegenständen und Farbmustern verifiziert werden.

Mit Blick auf die vorangegangenen Überlegungen lassen sich also zwei grundsätzliche Strategien für die Erklärungen von Qualitätsaussagen unterscheiden: mit oder ohne Paradigmen. Die ohne Paradigmen auskommende Erklärungsstrategie, welche im Folgenden als *verbale Strategie* bezeichnet werden soll, setzt zunächst voraus, dass die Qualitätsterme ohne Bezug auf entsprechende Paradigmen erklärt werden. Auf dieser Grundlage kann dann erklärt werden, dass der Term für die entsprechende Äquivalenzrelation genau dann auf zwei Gegenstände zutrifft, wenn auf beide Gegenstände dasselbe Äquivalenzprädikat zutrifft. Und wenn hierbei die Äquivalenzprädikate derart erklärt sind, dass je zwei solcher Terme einander wechselseitig ausschließen, dann ist jedes Äquivalenzprädikat invariant bezüglich des in der geschilderten Weise erklärten Ausdrucks für die Äquivalenzrelation.

Die *Paradigmenstrategie* setzt zunächst eine im Folgenden stets als *Projektionsbeziehung* bezeichnete Vergleichsrelation voraus, die insofern grundlegender als die entsprechende Äquivalenzrelation ist, als sie die räumliche Nähe ihrer Relata impliziert. In diesem Sinn bestünde also etwa in der wechselseitigen Deckung die Projektionsbeziehung der Längengleichheit. Und die Projektionsbeziehung der Gewichtsgleichheit bestünde im Einander die Waage halten. Ob der Ausdruck der Äquivalenzrelation auf zwei Gegenstände zutrifft, würde dann in der Weise festgestellt werden, dass diese gemäß der entsprechenden Projektionsbeziehung entweder miteinander oder aber mit bestimmten Paradigmen verglichen werden. Und ebenso würde, ob ein Äquivalenzprädikat auf einen Gegenstand zutrifft, durch dessen Vergleich mit einem dem Äquivalenzprädikat zugeordneten Paradigma festgestellt werden.

Wenn die Verwendung entsprechender Aussagen in der geschilderten Weise durch Paradigmenvergleiche geregelt ist, dann gibt es keine echten Erklärungs*prioritäten* zwischen den Äquivalenzprädikaten auf der einen Seite und dem Ausdruck der Äquivalenzrelation auf der Anderen. Denn in diesem Fall sind drei spezifische Umsetzungen der Paradigmenstrategie möglich. Erstens könnte zunächst der Äquivalenzrelationsausdruck ‚q' erklärt werden, um dann auf dieser Grundlage die ‚Q_i' analytisch durch ‚q zu m_i' zu erklären. Zweitens könnten auch zunächst die ‚Q_i' durch die Vergleiche mit den ihnen entsprechenden Paradigmen erklärt werden, um dann ‚q' im Sinn der Verbalstrategie durch das Zutreffen identische Äquivalenzprädikate zu definieren. Und schließlich könnten sowohl die ‚Q_i' als auch ‚q' unabhängig voneinander durch Bezug auf die entsprechenden Paradigmenvergleich erklärt werden.

4.2 Unter einem *Ziffernsystem* sei ein linear geordnetes System von Ausdrücken verstanden. Ferner sei das Aufsagen von Ziffern eines Systems in der Reihenfolge der entsprechenden Ordnung des Systems als *intransitives Zählen* bezeichnet. Alle weiteren Untersuchungen werden sich auf das Dezimalsystem beziehen. Unter den Ziffern des Dezimalsystems seien dabei wie üblich all diejenigen Konkatenationen der Grundziffern ‚0', ‚1', ..., ‚8', ‚9' verstanden, welche mit einer von ‚0' verschiedene Ziffer beginnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann also davon ausgegangen werden, dass sich eine Dezimalziffer ‚z' stets als Verknüpfung ‚$a_n a_{n-1} ... a_1$' bestimmter Grundziffern ‚a_i' darstellt.

Die Zählregel des Dezimalsystems lässt sich nun folgendermaßen darstellen. Falls es sich bei jedem ‚a_i' um die Grundziffer ‚9' handelt, dann folgt diejenige Dezimalziffer auf ‚z', welche aus ‚z' dadurch resultiert, dass jedes ‚a_i' durch ‚0' ersetzt und diesem Ausdruck die Grundziffer ‚1' vorangestellt wird. Angenommen nun, es handle sich nicht bei jedem der ‚a_i' um ‚9'! Wenn nun ‚$a_{i'}$' die, von rechts gesehen, erste von ‚9' verschiedene Grundziffer in ‚z' ist, dann folgt diejenige Dezimalziffer auf ‚z', welche wie folgt aus ‚z' resultiert: die ‚a_i' links von ‚$a_{i'}$' bleiben unverändert; die ‚a_i' rechts von ‚a_i' werden wieder jeweils durch ‚0' ersetzt; und ‚$a_{i'}$' selbst wird schließlich nach der folgenden Regeln ersetzt: handelt es sich bei ‚$a_{i'}$' um ‚0', so wird ‚$a_{i'}$' durch ‚1' ersetzt; handelt es sich bei ‚$a_{i'}$' um ‚1', so wird ‚$a_{i'}$' durch ‚2' ersetzt; ... ; handelt es sich bei ‚$a_{i'}$' um ‚8', so wird ‚$a_{i'}$' durch ‚9' ersetzt.

Für Dezimalziffern ‚n' sowie Sortale ‚F' und ‚G' sollen im weiteren Verlauf die drei hier diskutierten Arten von Zahlaussagen in der folgenden Weise abgekürzt werden:

‚n_M(F)' bedeutet: Es gibt *mindestens* n F

‚n(F)' bedeutet: Es gibt *genau* n F

‚#(F,G)' bedeutet: Es gibt ebenso viele F wie G

Ebenso wie im Fall von Äquivalenzrelationen und den entsprechenden Äquivalenzeigenschaften, bestimmen auch die logischen Beziehungen zwischen den Zahloperatoren der verschiedenen Arten, in welcher Weise diese Operatoren wechselseitig durcheinander erklärt werden können. Im Folgenden seien zunächst die wichtigsten logischen Regeln und Erklärungsmöglichkeiten dargestellt.

Zunächst stellt sich der grundlegende logische Zusammenhang zwischen den n_M-Operatoren und den n-Operatoren wie folgt dar:

(1) ‚n(F)' ist äquivalent zu ‚$n_M(F) \wedge \neg(n+1)_M(F)$'

(2) ‚n_M(F)' ist äquivalent zu ‚$\neg(0(F) \vee \ldots \vee (n\text{-}1)(F))$'

Für die Erklärungen der Operatoren beider Systeme bedeutet dies nun Folgendes: Wenn sich die ‚n_M' Operatoren ohne Bezug auf die Anzahloperatoren erklären lassen, dann können die Anzahloperatoren gemäß (1) analytisch durch die ‚n_M'-Operatoren erklärt werden. Und ebenso können die ‚n_M'-Operatoren gemäß (2) analytisch durch die Anzahloperatoren erklärt werden, wenn diese sich ihrerseits unabhängig von den ‚n_M'-Operatoren erklären lassen.

Ebenso wie Äquivalenzprädikate schließen sich auch die im Folgenden als Anzahloperatoren bezeichnete n-Operatoren wechselseitig aus. D.h.:

Für je zwei verschiedene ‚n' und ‚m' gilt: ‚n(F) ∧ m(F)' ist kontradiktorisch.

Ferner stellt sich auch der grundlegende logische Zusammenhang zwischen den Anzahloperatoren und dem Zahlengleichheitsoperator in analoger Weise dar wie der Zusammenhang zwischen Äquivalenzprädikaten und dem Ausdruck der entsprechenden Äquivalenzrelation:

Für jedes ‚n' gilt: ‚n(F)∧ #(F,G)' ist äquivalent zu ‚n(F)∧n(G)'.

Aufgrund dieser Invarianzbeziehungen können die Anzahloperatoren und der Zahlengleichheitsoperator in analoger Weise wechselseitig durcheinander erklärt werden wie Äquivalenzprädikate und der Ausdruck der entsprechenden Äquivalenzrelation, vorausgesetzt natürlich, dass sich die Anzahloperatoren ohne Bezug auf den Zahlgleichheitsoperator erklären lassen, und umgekehrt.

Genauer gilt also Folgendes: Angenommen, die Anzahloperatoren wären bereits unabhängig vom Zahlengleichheitsoperator ‚#' erklärt! Analog zur Erklärung des Ausdrucks einer Äquivalenzrelation durch Bezug auf das entsprechende System der Äquivalenzprädikate ließe sich in diesem Fall der Zahlengleichheitsoperator wie folgt durch Bezug auf das System der Anzahloperatoren erklären:

‚#(F,G)' ist wahr bei t ⇔ Es gibt ein ‚n' derart, dass gilt: ‚n(F)∧n(G)' wahr ist bei t.

Da sich die ‚n' auch rekursiv entsprechend der Zählregel darstellen lassen, kann die diese Erklärung auch in der folgenden Weise notiert werden:

‚#(F,G)' ist wahr bei t ⇔ Bei t ist eine der folgenden Aussagen wahr:

‚0(F)∧0(G)'

‚1(F)∧1(G)'

‚2(F)∧2(G)'

etc.

Angenommen nun, der Zahlengleichheitsoperator wäre bereits unabhängig von den Anzahloperatoren (und unabhängig von den ‚n_M'-Operatoren) erklärt! Dies entspräche also dem Fall, dass zwar bereits der Ausdruck einer Äquivalenzrelation wie etwa der Farbgleichheit erklärt ist, nicht jedoch die entsprechenden Farbterme. Wie in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, könnten die einzelnen Farbterme in diesem Fall durch Bezug auf spezifische Farbmuster sowie den Ausdruck der Farbengleichheit erklärt werden. Analog hierzu können nun die einzelnen Anzahloperatoren wie folgt durch Bezug auf den Zahlengleichheitsoperator sowie einen entsprechendes Sortal ‚A_n' erklärt werden:

‚n(F)' bedeutet: #(F,A_n).

In diesen Erklärungen würde also der Zahlengleichheitsoperator die Rolle übernehmen, die der Ausdruck der Farbengleichheit im Rahmen der Erklärung der Farbterme Inne hat. Und an die Stelle des Systems der Farbmuster würde ein System von Prädikaten ‚A_n' treten. Und ebenso wie sich als Farbmuster nur Gegenstände eignen, deren Farbe sich nicht ohne weiteres verändert, müssten die ‚A_n' derart gewählt werden, dass es zu jedem Zeitpunkt genau n Gegenstände gibt, auf die ‚A_n' zutrifft. Wie in Abschnitt 4.3 noch näher zu erläutern sein wird, könnten die ‚A_n' so definiert werden, dass sie jeweils auf die ersten n Kugeln eines Abakus und auf nichts sonst zutreffen.

In diesem und im folgenden Abschnitt sollen drei verschiedene Möglichkeiten dafür dargestellt werden, wie die ‚n_M'-Operatoren, die Anzahloperatoren und der Zahlengleichheitsoperator jeweils unabhängig voneinander erklärt werden können. Diese autonomen Erklärungen zeigen dann also insbesondere, dass es insofern keine echte *begriffliche Priorität* zwischen den Anzahloperatoren und dem Zahlengleichheitsoperator gibt, als beide wechselseitig (und zirkelfrei) durcheinander erklärt werden können.

Ist ‚F' ein Sortal, dann sei unter dem *transitives Zählen von Fs* der folgende Vorgang zu verstehen: das Verifikationsgebiet wird nach Fs durchsucht, wobei, bei ‚1' beginnend, der Reihe nach die Ziffern geäußert werden, wann immer ein bestimmtes F erstmalig ausfindig gemacht wird. Das transitive Zählen von Fs besteht also im Wesentlich darin, dass sich der Zählende von Ort zu Ort bewegt und dabei an den Orten, an denen sich ein F befindet, nicht ‚Dies ist ein F', sondern eine bestimmte Ziffer ausspricht.

Vom transitiven Zählen soll ferner das *Nummerieren* dadurch unterschieden werden, dass es für das Nummerieren – nicht jedoch für das transitive Zählen – zusätzlich wesentlich sei, dass sich jeweils gemerkt wird, in Bezug auf welches F welche Ziffer geäußert wird. Die einzelnen Nummerierungsakte ähneln somit den Taufakten, durch welche Eigennamen erklärt werden können, insofern auch nach einem Nummerierungsakt noch bestimmt ist, welche Ziffer gegenüber welchem Gegenstand geäußert wurde.

Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise die Verwendung – also die Erzeugung und Entscheidung – der Zahlaussagen, welche durch die ‚n_M'-Operatoren, die Anzahloperatoren bzw. den Zahlengleichheitsoperator gebildet sind, jeweils unabhängig voneinander durch Bezug auf das transitive Zählen bzw. das Nummerieren erklärt werden kann. Zunächst zu den ‚n_M'-Operatoren! Sei ‚F' wieder ein Sortal, dann stelle sich zunächst die Erzeugungsregel einer Aussage der Form ‚n_M(F)' wie folgt dar: sobald bei einer Nummerierung von Fs die Ziffer ‚n' erreicht wird, kann ‚n_M(F)' geäußert werden. Und ferner stelle sich die Entscheidungsregel von ‚n_M(F)' wie folgt dar: nach der Äußerung von ‚n_M(F)' wird mit dem Nummerieren von Fs begonnen. Sobald hierbei ‚n' erreicht wurde, wird die ursprüngliche Äußerung von ‚n_M(F)' bejaht. Falls hingegen das ganze Verifikationsgebiet durchschritten wurde, ohne bis zu ‚n' zu gelangen, so wird die Äußerung verneint. Das in praktischen Erklärungen der ‚n_M'-Operatoren vorzuführende Erzeugen und Entscheiden von Aussagen der Form ‚n_M(F)' stellt sich also dar als eine spezifische Erweiterung der Nummerierungstechnik um das Äußern von Aussagen, die durch ‚n_M' gebildet sind, bzw. das Bewerten solcher Äußerungen. Auf Seiten des Schülers müsste hierbei offenbar nur die Beherrschung der Nummerierungstechnik, nicht jedoch die Kenntnis der Verwendung von Anzahloperatoren oder des Zahlengleichheitsoperators vorausgesetzt werden.

Für die Kodifikation der soeben geschilderten Verwendungsweise der ‚n_M'-Operatoren bieten sich nun zwei Optionen an. Die einfache Option bestünde darin, im Sinn der Standardkonzeption auf den Bezug auf Raumzeitstellen zu verzichten. In diesem Fall kann die auf dem transitiven Zählen bzw. dem Nummerieren der F beruhende Verifikationsregel der durch ‚n_M' gebildeten Zahlaussagen durch die folgenden *Trivialerklärung* kodifiziert werden:

‚n_M(F)' ist wahr ⇔ Es gibt mindestens n Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft.

Es ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, dass das ‚n' in (N,n_M) variabel und (N,n_M) somit als die Form der folgenden Folge von Erklärungen zu verstehen ist.

‚1_M(F)' ist wahr ⇔ Es gibt mindestens 1 Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft.

‚2_M(F)' ist wahr ⇔ Es gibt mindestens 2 Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft.

‚3_M(F)' ist wahr ⇔ Es gibt mindestens 3 Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft.

Etc.

Die zweite verifikationsakkuratere Option für die Erklärung der ‚n_M' bestünde wieder darin, die in den obigen Erklärungen unterstellten Bezüge auf Raumzeitstellen explizit zu machen. Da es sich bei den durch ‚n_M' gebildeten Aussagen um Aussagen im Präsens handelt, kann der *Zeitbezug* zunächst in der wie folgt explizit gemacht werden:

‚$n_M(F)$' ist wahr bei t ⇔ Bei t gibt es mindestens n Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft

Dass es zu *einem* Zeitpunkt n *verschiedene* F gibt, impliziert, dass es n verschiedene Orte gibt, an denen ‚F' zu diesem Zeitpunkt anwendbar bzw. die entsprechende demonstrative Aussage ‚Dies ist ein F' wahr ist. Da materielle Gegenstände nicht einzelne Raumstellen, sondern stets *Bereiche* solche Raumstellen einnehmen, folgt jedoch daraus, dass ‚Dies ist ein F' zu einem Zeitpunkt an zwei verschiedenen Orten s_1 und s_2 wahr ist, noch nicht, dass das bei s_1 befindliche F von dem sich bei s_2 befindenden F verschieden ist. Dies ist vielmehr erst dann der Fall, wenn es zwischen s_1 und s_2 keinen Weg derart gibt, dass ‚Dies ist ein F' zum fraglichen Zeitpunkt an jedem Ort dieses Wegs wahr ist. Wenn zwei Orte s_1 und s_2 ‚F-zusammenhängend' genannt werden, falls es zwischen s_1 und s_2 einen Weg derart gibt, dass ‚Dies ist ein F' an jedem Ort dieses Wegs wahr ist, dann kann die Verwendung der ‚n_M' durch die folgende, nun auch den Ortsbezug entsprechender Aussage berücksichtigenden Bestimmung erklärt werden:

(N,n_M) ‚$n_M(F)$' ist wahr bei t ⇔ Bei t gibt es n verschiedene Orte $s_1,\ldots,s_n$ derart, dass gilt:
‚Dies ist ein F' ist wahr bei (s_1,t), (s_2,t), … , (s_{n-1},t) und (s_n,t).
Die s_i sind paarweise nicht F-zusammenhängend (bei t).

Es sollte in diesem Zusammenhang vielleicht darauf hingewiesen, dass (N,n_M) nicht so zu verstehen ist, dass die Verifikation von ‚$n_M(F)$' hiernach darin besteht, nicht Fs, sondern stattdessen Orte zu zählen (die von Fs besetzt sind). Was (N,n_M) bestimmt, ist vielmehr, dass für die Verifikation von ‚$n_M(F)$' Fs gezählt werden, die sich an verschiedenen Orten (bzw. Bereichen) befinden. Denn wenn die zu einem bestimmten Zeitpunkt existenten F gezählt werden, dann ist das Kriterium dafür, kein F doppelt zu zählen, räumlicher Art.

Nun zu den Anzahloperatoren! Die Erzeugungsregel einer durch einen von ‚0' verschiedenen Anzahloperator gebildeten Aussage ‚n(F)' stelle sich wie folgt dar: ‚n(F)' kann nach dem Nummerieren aller F im Verifikationsgebiet geäußert werden, falls hierbei ‚n' die letzte vergebene Ziffer war. Und die Entscheidungsregel einer solchen Aussage stelle sich wie folgt dar: zunächst wird wieder mit dem Nummerieren der Fs begonnen. Sobald hierbei ‚n+1' erreicht wird, kann das Nummerieren abgebrochen und die ursprüngliche Äußerung von ‚n(F)' verneint werden. Falls ‚n+1' bis zuletzt nicht erreicht wurde, wird ‚n(F)' bejaht, falls ‚n' die zuletzt vergebene Ziffer ist; und anderenfalls verneint. Die Erzeugung und Entscheidung von Aussagen, die durch von ‚0' verschiedene Anzahloperatoren gebildet sind, kann demnach durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe, welche wiederum als Form eine Folge von Wahrheitsbedingungsangaben zu verstehen ist, kodifiziert werden:

(N,n) ‚n(F)' ist wahr bei t ⇔ Es gibt n Orte s_1,...,s_n derart, dass gilt:
‚Dies ist ein F' ist wahr bei (s_1,t), (s_2,t), ... , (s_{n-1},t) und (s_n,t).
Die s_i sind paarweise nicht F-zusammenhängend (bei t).
Ist ‚Dies ist ein F' wahr bei (s_{n+1},t), dann ist s_{n+1} mit einem der s_i F-zusammenhängend.

Demnach gilt also ‚n(F)' genau dann als wahr, wenn das Nummerieren der F genau bis zu ‚n' führt. Ferner gelte ‚0(F)' genau dann als wahr, wenn ‚Dies ist ein F' an keinem Ort des Verifikationsgebiets wahr ist.

In Bezug auf (N,n) und (N,n_M) sind nun zwei Dinge zu bemerken. Erstens ergeben sich aus (N,n) und (N,n_M) die durch (1) und (2) dargestellten Äquivalenzen zwischen Aussagen, die durch die ‚n_M' Operatoren gebildet sind, und denen, die durch die Anzahloperatoren gebildet sind. Denn nach (N,n_M) gilt ‚n_M(F)∧¬(n+1)$_M$(F)' genau dann als wahr, wenn sich die F genau bis ‚n' nummerieren lassen; und nach (N,n) gilt ‚¬(0(F)∨...∨(n-1)(F))' genau dann als wahr, wenn die Nummerierung der F mindestens bis ‚n' vorangetrieben werden kann. Zweitens wird weder in (N,n_M) auf Anzahloperatoren, noch in (N,n) auf ‚n_M'-Operatoren Bezug genommen. Infolgedessen sind, wenn Operatoren beider Art entsprechend der Nummerierungsmethode verwendet werden, alle drei Erklärungsstrategien möglich: (i) man könnte zunächst die ‚n_M'-Operatoren durch (N,n_M) und darauf aufbauend die Anzahloperatoren analytisch durch ‚n(F): n_M(F)∧¬(n+1)$_M$(F)' erklären, so dass sich (N,n) als Theorem aus diesen Erklärungen ableiten ließe. (ii) Ebenso könnten zunächst die Anzahloperatoren durch (N,n) und darauf aufbauend die ‚n_M'-Operatoren analytisch durch ‚n_M(F): ¬(0(F)∨...∨(n-1)(F))' erklärt werden, so dass sich hieraus (N,n_M) als Theorem ableiten ließe. (iii) Und schließlich könnten auch die Anzahl- und die ‚n_M'-Operatoren jeweils durch (N,n) bzw. (N,n_M) erklärt werden, so dass sich hieraus die beiden vorab formulierten Äquivalenzen (1) und (2) als Theoreme ableiten ließen.

Nun zuletzt zum Zahlengleichheitsoperator! Wenn zum Einen die Anzahloperatoren durch (N,n) erklärt werden, und wenn zum Anderen ‚#', wie zuvor erläutert, in der Weise durch Bezug auf die Anzahloperatoren erklärt wird, dass ‚#(F,G)' genau dann als wahr gilt, falls eine

Aussage der Form ‚n(F)∧n(G)' wahr ist, dann würde sich die Erzeugung und die Entscheidung von ‚#(F,G)' wie folgt darstellen: Auf der Grundlage der Nummerierung aller F und der Nummerierung aller G werden zunächst die entsprechenden Anzahlaussagen ‚n(F)' und ‚m(G)' erzeugt, wobei also ‚n' die letzte an ein F und ‚m' die letzte an ein G vergebene Ziffer ist. Dann wird von der Äußerung dieser beiden Aussagen genau dann zur Äußerung von ‚#(F,G)' bzw. zur Bejahung einer solchen Äußerung übergegangen, falls es sich bei ‚n' und ‚m' um ein und dieselbe Ziffer handelt.

Diese Verifikationsmethode kann nun offenbar dadurch in der Weise modifiziert werden, dass sie nicht mehr die Verwendung von Anzahlaussagen einschließt, dass auf den Schritt, in dem die Anzahlaussagen ‚n(F)' und ‚m(G)' geäußert werden, einfach verzichtet wird. Und wenn in dieser Weise nach der Nummerierung der F und der Nummerierung G ‚#(F,G)' genau dann geäußert (bzw. eine solche Äußerung bejaht) wird, wenn die zuletzt an ein F vergebene Ziffer identisch mit der zuletzt an ein G vergebenen Ziffer ist, dann lässt sich die Verwendung des Zahlengleichheitsoperators durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe kodifizieren:

(N,#) ‚#(F,G)' ist wahr bei t ⇔ Es gibt ein n derart, dass gilt:

Es gibt n Orte $s_1,...,s_n$ derart, dass gilt:

‚Dies ist ein F' ist wahr bei (s_1,t), (s_2,t), ... , (s_{n-1},t) und (s_n,t).

Die s_i sind paarweise nicht F-zusammenhängend (bei t).

Ist ‚Dies ist ein F' wahr bei (s_{n+1},t), dann ist s_{n+1} mit einem der s_i F-zusammenhängend.

Es gibt n Orte $s'_1,...,s'_n$ derart, dass gilt:

‚Dies ist ein G' ist wahr bei (s'_1,t), (s'_2,t), ... , (s'_{n-1},t) und (s'_n,t).

Die s_i sind paarweise nicht G-zusammenhängend (bei t).

Ist ‚Dies ist ein G' wahr bei (s'_{n+1},t), dann ist s'_{n+1} mit einem der s'_i G-zusammenhängend.

Anders als im Fall von (N,n_M) und (N,n) handelt es sich bei (N, #) nicht um die Form eine Folge von Erklärungen, sondern um eine einzige Erklärung, welche sich allerdings auf eine Folge von Bedingungen bezieht, die in (N, #) durch ihre Form spezifiziert werden. Wird die fraglichen Bedingungsfolge nicht wie in (N, #) durch den Gebrauch der Variable n, sondern durch ein Anfangsstück ihrer Entwicklung dargestellt wird, ergibt sich die folgende Formulierung:

(N,#) ‚#(F,G)‘ ist wahr bei t ⇔ Eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:

(0) Es gibt keinen Ort s derart, dass ‚Dies ist ein F‘ wahr bei (s,t) ist. Und es gibt keinen Ort s′ derart, dass ‚Dies ist ein G‘ wahr bei (s′,t) ist.

(1) Es gibt ein s_1 derart, dass gilt: ‚Dies ist ein F‘ wahr bei (s_1,t), und wenn ‚Dies ist ein F‘ wahr bei (s_2,t) ist, so sind s_1 und s_2 F-zusammenhängend. Und es gibt s'_1 derart, dass gilt: ‚Dies ist ein G‘ wahr bei (s'_1,t), und wenn ‚Dies ist ein G‘ wahr bei (s'_2,t) ist, so sind s'_1 und s'_2 G-zusammenhängend.

Etc.

Abschließend kann also festgehalten werden, dass (N,n_M), (N,n) und (N,#) zeigen, dass die ‚n_M‘-Operatoren, die Anzahloperatoren und der Zahlengleichheitsoperator jeweils unabhängig voneinander erklärt werden können. Dabei stellt sich die durch diese Erklärungen bestimmte Erzeugung und Entscheidung entsprechender Zahlaussagen jeweils als eine spezifische Erweiterung der Nummerierung bzw. des transitiven Zählens bestimmter Gegenstände dar.

Sämtliche Zahloperatoren können ebenfalls als Erweiterungen der dem Nummerieren verwandten Methode der *Umfangsbestimmung* erklärt werden. Dabei sei unter der Bestimmung des Umfangs eines Sortals ‚F‘ (zum Zeitpunkt t) Folgendes zu verstehen: wie beim Nummerieren wird auch bei der Umfangsbestimmung der gesamte Verifikationsbereichs auf das Vorkommen von Fs untersucht. Doch anstatt die dabei ausfindig gemachten Fs zu nummerieren, werden jeweils deren Namen auf einer Liste notiert. Dabei sei angenommen, dass alle Fs entweder bereits verschiedene Namen haben oder aber ihnen diese jeweils zugeordnet werden, sobald sie ausfindig gemacht werden. Nach Abschluss dieses Verfahrens steht also für jedes ausfindig gemachte F genau ein Name auf der Umfangsliste. Im Folgenden sei die Rede von Umfängen von Sortalen (in der Metasprache) in der Weise in der Notation der Mengenlehre formuliert, dass der Fall, dass bei der Umfangsbestimmung von ‚F‘ genau die Namen ‚f_1‘,..., ‚f_n‘ auf der Umfangsliste notiert werden, durch $U(F)=\{f_1,...,f_n\}$ ausgedrückt wird.

Klar ist nun: Genau dann, wenn die Umfangsbestimmung von ‚F’ dazu führt, dass genau n Namen auf der entsprechenden Umfangsliste stehen, werden bei der Nummerierung der F genau die Ziffern zwischen ‚1‘ und ‚n‘ verteilt. Das bedeutet, dass die Nummerierung der Fs stets bei derselben Ziffer enden muss wie eine Nummerierung der bei der Umfangsbestimmung von ‚F‘ ermittelten Namen. Daher können die einstelligen Zahlaussagen ‚n_M(F)‘ und ‚n(F)‘ nicht nur basierend auf einer Nummerierung der Fs, sondern alternativ auch basierend auf einer Umfangsbestimmung von ‚F‘ und der Nummerierung der dabei ermittelten Namen verifiziert werden.

Da die Berücksichtigung raumzeitlicher Parameter in Wahrheitsbedingungsangaben deren Komplexität zum Teil massiv erhöht, soll im Folgenden auf derartige Präzisierungen verzichtet werden. In diesem Fall lassen die auf Umfangsbestimmungen basierenden Verifikationsmethoden wie folgt kodifizieren:

(U,n_M) ‚n_M(F)' ist wahr ⇔ Es gibt n Namen ‚f_1',..., ‚f_n' derart, dass gilt:
$\{f_1,...,f_n\} \subseteq U(F)$.

(U,n) ‚n(F)' ist wahr ⇔ Es gibt n Namen ‚f_1',..., ‚f_n' derart, dass gilt:
$U(F)=\{f_1,...,f_n\}$

Nun gilt ferner: Genau dann, wenn die Nummerierung der F und der G jeweils mit derselben Ziffer endet, müssen auf den Umfangslisten von ‚F' und ‚G' gleich viele Namen stehen. Daher kann eine Zahlengleichheitsaussage ‚#(F,G)' auch dadurch verifiziert werden, dass zunächst die Umfangslisten von ‚F' und ‚G' erstellt werden, um daraufhin festzustellen, ob auf beiden Listen gleich viele Namen stehen. Ob die Umfangslisten von ‚F' und ‚G' in diesem Sinn gleichlang sind, kann allerdings nicht nur durch eine Zählung, sondern auch durch eine wechselseitige Zuordnung der Namen beider Listen festgestellt werden. Beide Methoden können allerdings kodifiziert werden durch die folgende, einheitliche Wahrheitsbedingungsangabe:

(U,#) ‚#(F,G)' ist wahr ⇔ Es gibt ein n derart, dass gilt:
Es gibt n ‚f_1',..., ‚f_n' derart, dass $U(F)=\{f_1,...,f_n\}$; und
Es gibt n ‚g_1',..., ‚g_n' derart, dass $U(G)=\{g_1,...,g_n\}$.

4.3 Wie im Anschnitt zuvor festgestellt, gibt es keine grundsätzliche *begriffliche Priorität* zwischen den *Anzahloperatoren* einerseits und dem *Zahlengleichheitsoperator* andererseits. Denn durch Bezug auf das transitive Zählen (bzw. das Nummerieren) lassen sich die Anzahloperatoren ohne Bezug den Zahlengleichheitsoperator erklären, und umgekehrt. Neben dem transitiven Zählen gilt auch das wechselseitige *Zuordnen* von Gegenständen als Grundlage für die Verifikation von Zahlaussagen. In diesem Abschnitt soll daher die von der Frage nach der begrifflichen Priorität nicht immer streng getrennte Frage nach eventuellen *operativen Prioritäten* zwischen dem Zählen und dem Zuordnen diskutiert werden, d.h. also die Frage, ob Zahlaussagen allein durch transitives Zählen und ohne ein Zuordnen (bzw. allein durch ein Zuordnen und ohne transitives Zählen) verifiziert werden können.

Verschiedentlich wird behauptet, auch beim Zählen von Fs und Gs würden bereits Fs und Gs einander wechselseitig zugeordnet, insofern ein F und ein G als einander zugeordnet gelten könnten, falls sie durch die dieselbe Ziffer abgezählt wurden (vgl. Dummett 1991, S. 144). Unter Rückgriff auf die in Abschnitt 4.2 entwickelte Terminologie sollte diese These jedoch vielleicht dahingehend abgeschwächt werden, dass man sagt, dass nur im Fall des *Nummerierens* der F und der G, nicht aber im Fall des Zählens Fs und Gs einander zugeordnet werden. Denn für die Rede von einer Zuordnung scheint es wesentlich, dass man, nachdem zugeordnet wurde, noch immer bestimmen kann, welche Gegenstände einander zugeordnet wurden.

Im Folgenden sei die aus den Nummerierungen der F und der G resultierenden Nummerierungszuordnung N(F,G) genauer wie folgt zu verstehen:

> Falls ‚n' sowohl ein F als auch ein G nummeriert, gelten das fragliche F und das fragliche G als einander gemäß N(F,G) zugeordnet. Falls ‚n' nur ein F, jedoch kein G nummeriert (oder umgekehrt), gelte das fragliche F als dem letzten nummerierten G zugeordnet (bzw. umkehrt).

Ein Beispiel hierzu: wenn bei entsprechenden Nummerierungen 2 Gabeln und 4 Messer nummeriert wurden, dann gelten also zum Einen die durch ‚1' nummerierte Gabel und das durch ‚1' nummerierte Messer als einander zugeordnet; und zum Anderen gelten die durch ‚2', ‚3' und ‚4' nummerierten Messer als der durch ‚2' nummerierten Gabel zugeordnet. In jedem Fall gilt also, dass die aus Nummerierungen von F und G resultierende Zuordnung N(F,G) jedem F mindestens ein G und jedem G mindestens ein F zuordnet. Demnach können in Bezug auf N(F,G) die folgenden drei einander wechselseitig ausschließenden Fälle unterschieden werden: entweder gibt es ein F, dem mehrere G zugeordnet werden; oder es gibt ein G, dem mehrere F zugeordnet werden, oder aber jedem F wird genau ein G und jedem G genau ein F zugeordnet. Im letzten Fall soll N(F,G) als 1-1, in den beiden ersten Fällen als 1-v bezeichnet werden. Unter Rückgriff auf diese Terminologie lässt sich also sagen:

> ‚#(F,G)' ist wahr ⇔ N(F,G) ist 1-1.

So, wie sich aus den Nummerierungen der F und der G Nummerierungszuordnungen entwickeln lassen, lassen sich im Übrigen auch aus den Umfangsbestimmungen von ‚F' und ‚G' analoge Zuordnung entwickeln. So könnten nach einer Nummerierung der Namen beider Umfangslisten diejenigen Fs und Gs als einander zugeordnet gelten, deren Namen entsprechend der Nummerierungszuordnung als einander zugeordnet gelten. Natürlich können die Namen der F und der G auch ohne deren Nummerierung einander zugeordnet werden; etwa dadurch, dass sie in einer dritten Liste nebeneinander geschrieben werden. Auf Grundlage einer solchen Namenszuordnung könnten dann wieder die Fs und die Gs als einander zugeordnet gelten, deren Namen einander zugeordnet sind.

Zuordnungen der soeben geschilderten Art – also Zuordnungen zwischen Gegenstände, welche allein auf den Gegenständen zugeordneten *Ausdrücken* (Namen oder Ziffer) gründen – sind von „echten" Relationen, wie etwa Äquivalenzrelationen der oben geschilderten Art, bestimmten Lagebeziehungen und dergleichen zu unterscheiden, welche zwischen Gegenständen unabhängig von den ihnen gegebenenfalls zugeordneten Ausdrücken bestehen (oder nicht bestehen). Auch wenn die Fs und die Gs in keiner einheitlichen Beziehung zueinander stehen, können sie einander durch eine entsprechende Nummerierung zugeordnet werden. So müssen etwa die einander durch ihre Nummerierung zugeordneten Gabeln und Messer nicht jeweils in bestimmter Beziehung (wie etwa der Größen- oder Massengleichheit) zueinander stehen. Allerdings lässt sich die Unterscheidung 1-1 und 1-v auch auf echte Relationen übertragen. Dementsprechend sei also etwa, dass die Fs und Gs 1-1 bezüglich einer Relation R sind, gleichbedeutend damit, dass jedes F genau zu einem G in Relation R steht, und umgekehrt. Im Folgenden sei angenommen, dass eine Aussage dieser Art durch ‚R(F,G) ist 1-1' ausgedrückt werde. Und analog drücke ‚R(F,G) ist 1-v' aus, dass die Fs und Gs 1-v bezüglich R sind.

Es soll nun die Logik von Aussagen dieser Art dargestellt werden. Der Knappheit halber seien die hierbei anzugebenden Regeln wieder entweder gar nicht, oder aber nur informell abgeleitet. Zunächst gelten die folgenden beiden Regeln:

(1.1) ‚R(F,G) ist 1-1 $\wedge$ ‚R(F,G) ist 1-v' ist kontradiktorisch

(1.2) ‚R(F,G) ist 1-1 $\vee$ ‚R(F,G) ist 1-v' ist nicht tautologisch.

Die Regel (1.1), wonach also ‚R(F,G) ist 1-1' und ‚R(F,G) ist 1-v' einander ausschließen, gilt in analoger Weise auch für N(F,G). Regel (1.2) hingegen nicht. Diese Regel besagt, dass die Unterscheidung zwischen 1-1 und 1-v in Bezug auf Relationen nicht erschöpfend ist. Denn anders als im Fall von N(F,G) ist es z.B. auch möglich, dass bestimmte Fs zu keinem G in Relation R stehen, so dass also weder ‚R(F,G) ist 1-1' noch ‚R(F,G) ist 1-v' wahr ist. In Bezug auf Zahlengleichheitsaussagen gelten nun ferner die folgenden beiden Regeln:

(2.1) ‚R(F,G) ist 1-1' impliziert ‚#(F,G)', aber nicht umgekehrt.

(2.2) ‚R(F,G) ist 1-v' impliziert ‚¬#(F,G)', aber nicht umgekehrt.

Die Geltung dieser Regeln ist im Prinzip klar: denn sind die Fs und Gs 1-1 (bzw. 1-v) bezüglich R, so sind sie es auch bezüglich N(F,G), sofern die Fs und Gs entsprechend R nummeriert werden. Umgekehrt folgt daraus, dass sich die F und G 1-1 bzw. 1-v nummerieren lassen, wie gesagt, nicht, dass die entsprechenden Fs und Gs in irgendwelchen echten Relationen zueinander stehen. Bezogen auf die Anzahlaussagen gilt mithin die folgende Regel:

(3) ‚n(F) ∧ R(F,G) ist 1-1' impliziert ‚n(F)∧n(G)', aber nicht umgekehrt

Mit Blick auf diese Regeln kann nun gesagt werden, dass die Zahlengleichheitsaussage ‚#(F,G)' zu der entsprechenden Aussage ‚R(F,G) ist 1-1' im selben Verhältnis steht wie eine Aussage, welche das Bestehen einer bestimmten Äquivalenzrelation zwischen zwei Gegenständen behauptet, zu der Aussage, welche das Bestehen der entsprechenden Projektionsbeziehung behauptet. Auf die Längengleichheit bezogen entspräche also ‚R(F,G) ist 1-1' einer Aussage, die behauptet, zwei Gegenstände würden einander wechselseitige decken; und ‚R(F,G) ist 1-v' entspräche der Aussage, dass ein Gegenstand den anderen (einseitig) überdecke. Denn in Analogie zu (1.1) und (1.2) gilt zum Einen: dass zwei Gegenstände einander decken, steht im Widerspruch dazu, dass der eine den Anderen überdeckt. Und von zwei Gegenstände, die sich nicht unmittelbar nebeneinander befinden, kann weder gesagt werden, sie deckten einander wechselseitig, noch, einer überdecke den Anderen. Ferner gilt in Analogie zu (2.1): wenn zwei Gegenstände einander wechselseitig decken, dann sind sie gleichlang; aber anderseits folgt daraus, dass sie gleichlang sind, nicht, dass sie einander wechselseitig decken. Was die Längengleichheit zweier Gegenstände impliziert, ist lediglich, dass, wenn sie aneinander gelegt werden, sie einander wechselseitig decken.

Wie in Abschnitt 4.1 erläutert, kann aus diesem Grund die Längengleichheit nicht durch die Tatsächlichkeit, sondern nur durch die Möglichkeit der wechselseitigen Deckung erklärt werden. Es kann also nur bestimmt werden, dass zwei Gegenstände genau dann gleichlang sind, wenn sie, sobald man sie aneinander legt, einander wechselseitig decken. Und analog hierzu kann die Zahlengleichheitsaussage ‚#(F,G)' nicht als gleichbedeutend mit ‚R(F,G) ist 1-1' erklärt werden. Vielmehr käme als Erklärung von ‚#(F,G)' überhaupt nur eine Bestimmung der folgenden Art in Frage:

‚#(F,G)' ist wahr ist ⇔ Wenn die Fs und Gs in Beziehung R zueinander gebracht werden, dann ist ‚R(F,G) ist 1-1' (im Gegensatz zu ‚R(F,G) ist 1-v') wahr.

Die dieser Möglichkeitserklärung entsprechende Verifikationsmethode wäre allerdings in den seltensten Fällen praktikabel, da Gegenstände vielfach nicht ohne weiteres in eine bestimmte Beziehung zueinander gesetzt werden können. Immerhin wäre es im Fall leicht transportabler Gegenständen wie etwa Gabeln und Messern verschiedentlich möglich, deren Zahlengleichheit durch Bezug auf eine bestimmte Lagebeziehungen (etwa das Nebeneinanderliegen) zu verifizieren. Bezogen auf den zuvor geschilderten Fall könnte man also in diesem Sinn die erste Gabel neben das erste Messer und die restlichen drei Messer neben die verbliebene zweite Gabel legen. Dass hiernach die Messer und Gabeln 1-v hinsichtlich des Nebeneinanderliegens und darum nicht zahlengleich sind, könnte hierbei also ohne jegliches Zählen, Nummerieren oder Umfangsbestimmen festgestellt werden.

Aus analogen Gründen wurde in Abschnitt 4.1 im Zusammenhang mit dem Distanzproblem darauf verwiesen, dass es zumindest praktischer ist, die qualitative Identität zweier Gegenstände nicht dadurch zu definieren, dass es möglich ist, sie selbst in die fragliche Projektionsbeziehung zueinander zu bringen, sondern vielmehr dadurch, dass es möglich ist, beiden Gegenstände zu einem dritten Gegenstand – nämlich einem bestimmten Paradigma eines entsprechenden Paradigmensystems – in die Projektionsbeziehung zu bringen. Eine hierzu analoge Erklärung der Zahlengleichheit müsste sich demnach derart gestalten, dass bestimmt wird, dass ‚#(F,G)' genau dann als wahr gilt, wenn es gelingt, die Fs und Gs in eine spezifische 1-1 Relation zu Gegenständen zu bringen, auf die ein drittes Sortal ‚A' zutrifft. Anstelle des Paradigmensystems müsste im Fall der Zahlengleichheit also ein System von Sortalen ‚A_n' derart treten, dass es (zu jedem beliebigen Zeitpunkt) jeweils genau n A_n (Gegenstände, auf die ‚A_n' zutrifft) gibt.

Eine solche Erklärung der Zahlengleichheit könnte sich etwa folgendermaßen gestalten. Die Rolle der zu den F und den G in Beziehung zu setzen Gegenstände könnte durch eine Menge von Kugeln übernommen werden, die wie auf einem Abakus in bestimmter Weise aufgereiht werden. Dabei bezeichnen die ‚A_n' dann jeweils die ersten n Kugeln.[1] Die Verifikation von ‚#(F,G)' gestaltet sich dann derart, dass in einem ersten Schritt die Kugeln der Reihe nach an die Fs verteilt (also etwa angeheftet) werden, um dann, nach Abschluss der Verteilung, die erste nicht verteilte Kugel in bestimmter Weise zu markieren. Anschließend werden alle verteilten Kugeln in die alte Ordnung zurückgebracht, um in einem zweiten Schritt dasselbe Verfahren – also Verteilung und Markierung – in Bezug auf die G durchzuführen. Hiernach gilt dann ‚#(F,G)' genau dann als wahr, wenn in beiden Schritten jeweils dieselbe Kugel markiert wurde. Und genau

[1] Aus dem Umstand, dass hierbei stets nur endlich viele Kugeln tatsächlich aufgereiht sind, entsteht kein Unendlichkeitsproblem, da angenommen werden kann, dass bei Bedarf stets weitere Kugeln hergestellt und hiernach aufgereiht werden könnten.

dann, wenn dies der Fall ist, könnte man im Prinzip auch sagen, dass genau die vor der in beiden Schritten markierten Kugel aufgereihten Kugeln (im Moment ihrer jeweiligen Verteilung an die Fs und die Gs) 1-1 zu den F und zu den G bezüglich der Beziehung des Anheftens waren. Wenn also der Umstand, dass sich die ersten n Kugeln an die F bzw. die G anheften lassen durch ‚$\Pi(F,A_n)$' bzw. durch ‚$\Pi(G,A_n)$' ausdrückt wird, dann lässt sich die soeben geschilderte Verifikationsmethode durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe kodifizieren:

(A,#) ‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt ein n derart, dass $\Pi(F,A_n)$ und $\Pi(G,A_n)$.

Im Prinzip könnte sich die Verifikation von ‚#(F,G)' natürlich auch derart gestalten, dass die Kugeln jeweils nur verschoben anstatt an die fraglichen Gegenstände verteilt werden. Allerdings würde hierdurch keine echte Relation zwischen den Kugeln und der entsprechenden Gegenstände hergestellt. Bedeutsam für die Ausgangsfrage dieses Abschnitts ist jedoch, dass beide Verifikationsmethoden kein Zählen oder Nummerieren beinhalten würden.

Für auf (A,#) basierende Erklärungen der Anzahloperatoren würden sich nun Bestimmungen der folgenden Form nahelegen:

(A,n) ‚n(F)' ist wahr $\Leftrightarrow$ $\Pi(F,A_n)$.

Falls die Sortale ‚A_n' auch in der Objektsprache erklärt sind, könnten die (A,n) auch zu analytischen Definitionen der folgenden Form umgeformt werden: ‚n(F)' bedeutet: #(F,A_n). Gemäß diesen Erklärungen müssten die Anzahlaussagen ‚n(F)' also jeweils derart verifiziert werden, dass festgestellt wird, ob es sich bei den Kugeln, welche sich an die F verteilen lassen, um die A_n (also um die ersten n Kugeln) handelt. Hierbei wäre allerdings zunächst festzulegen, in welcher Weise festgestellt wird, dass die verschobenen Kugeln genau die A_n sind. Eine Möglichkeit hierfür bestünde natürlich wieder im Zählen der Kugeln. Doch wenn die Verifikation von ‚n(F)' in dieser Weise dann letztlich doch einen Zählvorgang beinhalten würde, könnten natürlich auch unmittelbar die F (anstatt die an sie verteilten Kugeln) gezählt werden. Die für die Frage nach der operativen Priorität des Zählens relevante Frage wäre vielmehr, ob sich auch ohne eine Zählvorgang feststellen lässt, ob es sich bei den verteilten Kugeln genau um die A_n handelt.

Es sei nun zunächst angenommen, es würden stets nur die Anzahlen von Sortalen bestimmt, welche eine bestimmte Anzahl N nicht überschreiten, so dass also nur die ersten N Anzahloperatoren zu erklären wären. In diesem Fall könnten die hierfür erforderlichen N Kugeln der Reihe nach durch Ziffern beschriftet werden. Und die Verifikation einer Anzahlaussage ‚n(F)' könnte sich dann derart gestalten, dass ‚n' mit derjenigen Ziffer vergleichen wird, durch welche die erste nicht verteilte Kugel beschriftet ist. Handelt es sich in beiden Fällen um die gleiche Ziffer, gilt ‚n(F)' als wahr; anderenfalls als falsch. Diese Verifikationsmethode könnte also auch vom jemandem beherrscht werden, der nicht zählen kann. Allerdings ist die Möglichkeit, dass soeben geschilderte Ableseverfahren ohne die Durchführung eines Zählvorgangs anzuwenden, tatsächlich auf den Fall eines endlichen Kugelsystems beschränkt. Denn wenn für die Verifikation von Anzahlaussagen gegebenenfalls neue Kugeln hergestellt und (im Rahmen der Verifikation) beschriftet werden müssen, so wäre hierbei eben die Beschriftung als Zählung bzw. Nummerierung aufzufassen.

Um das Zählen auch im unendlichen Fall gänzlich zu vermeiden, könnte jedoch das soeben dargestellte Beschriftungsverfahren in der folgenden Weise weiter modifiziert werden. Zunächst werden die A_n nicht auf ein Kugelsystem, sondern jeweils auf disjunkte Mengen von Kugeln bezogen. Dabei könnten die einem A_n entsprechenden Kugeln etwa in einer durch ‚n' (oder auch ‚A_n') beschrifteten Kiste aufbewahrt werden. Eine Anzahlaussage ‚n(F)' wird dann in der Weise verifiziert, dass die Kugeln der mit ‚n' beschrifteten Kiste an die F verteilt werden, wobei dann also ‚n(F)' genau dann als wahr gilt, wenn die fraglichen 1-1 auf die F verteilt werden können. Auch in diesem Fall stellte sich die Schwierigkeit, dass zu jedem Zeitpunkt nur eine endliche Anzahl N von beschrifteten Kisten zur Verfügung steht, und dass daher, wann immer für ein n>N eine entsprechende Anzahlaussage ‚n(F)' zu verifizieren ist, zunächst erst die entsprechende Kiste angefertigt werden müsste. Hierfür gäbe es jedoch neben der Möglichkeit, n Kugeln transitiv abzuzählen und in die fragliche Kiste zu legen, auch die folgende Möglichkeit. Zunächst wird die A_{N+1} entsprechende Kiste in der Weise bestimmt, dass jeder Kugel aus A_N genau eine (hierfür eventuell erst herzustellenden Kugel) Kugel zugeordnet wird. Die zugeordneten Kugeln sowie eine weitere Kugel werden dann in eine Kiste gelegt, die durch ‚N+1' beschriftet wird. Durch die Wiederholung dieser Methode können dann alle Kisten bis einschließlich der gesuchten, A_n entsprechenden Kiste gefüllt und beschriftet werden. Man kann somit sagen, dass im Rahmen dieser Verifikationsmethode von Anzahlaussagen ‚n(F)' *nicht* transitiv gezählt, sondern *nur* zugeordnet werde. Zum einen ist klar, dass weder die F noch die irgendwelche Kugeln hierbei gezählt werden. Und die Kisten werden zwar durch Ziffern beschriftet; jedoch erfolgt diese Beschriftung einer bestimmten Kiste nicht auf der Grundlage einer Beschriftung aller anderen Kisten mit kleinerer Nummer. Die Praktizierung dieser Verifikationsmethode wäre natürlich äußerst umständlich. Die prinzipielle Möglichkeit ihrer Praktizierung zeigt jedoch, in welcher Weise es möglich wäre, Anzahlen zu bestimmen, ohne zu zählen bzw. zu nummerieren.

Ebenso wie in Bezug auf die Frage nach der begrifflichen Priorität kann also auch in Bezug auf die Frage nach der *operativen Priorität* das Fazit gezogen werden, dass *keine* prinzipielle Priorität zwischen dem Zählen und dem Zuordnen gibt. Zum einen wurde in diesem Abschnitt gezeigt, dass Zahlaussagen auch ohne transitiv zu zählen allein durch das Zuordnen (oder in Beziehung setzen) von Gegenständen verifiziert werden können. Zum Anderen können, wie in Abschnitt 4.2 erläutert wurde, Zahlaussagen auch durch das transitive Zählen verifiziert werden. Ob auch das transitive Zählen als ein Zuordnen aufzufassen ist, hängt natürlich wesentlich davon ab, wie weit man den Ausdruck ‚zuordnen' definiert. Wie zu Beginn dieses Abschnitts erläutert, scheint es jedoch angemessen, den Begriff des Zuordnens so eng zu fassen, dass zwar das Nummerieren, nicht jedoch transitive Zählen hierunter fällt. Und bei Zugrundelegung dieser Definition des Zuordnens kann dann auch gesagt werden, dass eine Verifikation von Zahlaussagen ohne ein Zuordnen irgendwelcher Art möglich ist.

Zum Abschluss dieser Untersuchungen soll nun noch kurz auf einen bereits von Russell (1937, §109) formulierten Einwand gegen die Möglichkeit der Erklärung von Zahlaussagen durch Bezug auf das Zählen eingegangen werden. Dieser Einwand bezieht sich auf den hier nicht betrachteten Fall *unendlicher* Begriffe und lautet sinngemäß wie folgt: Für unendliche Begriffe kann Anzahl und Zahlengleichheit nicht durch Bezug auf das Zählen, sondern nur durch Bezug auf das Zuordnen erklären werden, da die Zählmethode in diesem Fall nicht angewendet werden kann. Die entscheidende Prämisse hierbei wäre also die These, dass unendlich viele Gegenstände – etwa die geraden und die ungeraden Zahlen – einander zwar 1-1 zugeordnet, nicht jedoch gezählt werden können.

Hierzu ist nun Folgendes zu sagen: Es ist streng zu unterscheiden zwischen einem *tatsächlichen* Zuordnen einerseits und der Angabe einer *Regel* für ein tatsächliches Zuordnen andererseits. Und eben weil es unbeschränkt viele gerade und ungerade Zahlen gibt, können alle geraden und ungeraden Zahlen einander nur in dem Sinn zugeordnet werden, dass eine Regel für solche Zuordnungen angegeben wird, also etwa die Regel, dass jeweils 2n+1 und 2n einander zuzuordnen sind. Die Rede von einer Anwendung der Zuordnungsmethode auf unendliche Begriffe setzt also voraus, dass der Begriff des Zuordnens in der Weise erweitert wird, dass auch die Angabe von Zuordnungsregeln – und nicht nur, das eigentliche Zuordnen – hierunter fällt.

Aber analoger Weise kann natürlich auch in Bezug auf das Nummerieren zwischen einem tatsächlichen Nummerieren und der Angabe einer Nummerierungsregel unterschieden werden. Und auch wenn es nicht so etwas gibt, wie tatsächlich jeder geraden und jeder ungeraden Zahl eine Nummer zu geben, so ist es dennoch möglich, entsprechende Nummerierungsregeln anzugeben; also etwa die Regeln, dass jedes 2n+1 und jedes 2n jeweils durch ‚n' zu nummerieren ist. Wenn nun der Begriff des Nummerierens in der Weise erweitert wird, dass auch die Angabe von Nummerierungsregeln hierunter fällt, dann kann auch sinnvoll von einer Anwendung der Nummerierungsmethode auf unendliche Begriffe gesprochen werden.

Russells Prämisse, wonach die Zuordnungsmethode einen weiteren Anwendungsbereich als die Nummerierungsmethode hat, wäre also nur dann haltbar, wenn nur der Begriff des Zuordnens, nicht aber der Begriffs des Nummerierens derart erweitert wird, dass auch entsprechende Regelangaben hierunter fallen. Überdies ist zu bemerken, dass die Betonung der Rolle des Zuordnens für die Semantik von Zahlaussagen auch deshalb problematisch ist, als natürlich klar gesagt werden muss, dass, praktisch gesehen, das transitive Zählen die mit Abstand gebräuchlichste Methode der Bestimmung von Anzahlen und Zahlengleichheiten ist.

4.4 In Abschnitt 4.2 wurden die auf der Nummerierungs- und der Umfangsmethode beruhenden Verwendungsregeln von Zahlaussagen durch Wahrheitsbedingungsangaben kodifiziert, welche sich auf demonstrative Aussagen – also Aussagen der Form ‚Dies ist ein F' – beziehen. In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, dass sich die fraglichen Verwendungsweisen alternativ auch durch Wahrheitsbedingungsangaben kodifizieren lassen, welche sich auf andere Arten von Aussagen – insbesondere auf Existenzaussagen und Prädikationen – beziehen. Bei den Entwicklungen dieser alternativen Wahrheitsbedingungsangaben wird sich zeigen, dass diese Angaben zum Teil populären Erklärungen der Zahlaussagen entsprechen. Indem diese Erklärungen in Verbindung zur Nummerierungsmethode bzw. zur Umfangsmethode gebracht werden, wird sich demnach zeigen, wie diese Erklärungen operational – als verifikationsbezogen – verstanden werden können.

Es sei zunächst angenommen, dass eine in der Sprache der Prädikatenlogik formulierte Existenzaussage der Form ‚$\exists\ x_1,\ldots,x_n\ (F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n))$' genau dann wahr ist, wenn es n *verschiedene* Orte gibt, an denen ‚Dies ist ein F' wahr ist. Wenn die Zahlaussagen gemäß der Nummerierungsmethode verwendet werden, kann diese Verwendung demnach durch die folgenden, auf *Existenzaussagen* bezogenen Wahrheitsbedingungsangaben kodifiziert werden:

(N_1,n_M) ‚$n_M(F)$' bedeutet: $\exists\ x_1,\ldots,x_n\ (F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n))$

(N_1,n) ‚n(F)' bedeutet: $\exists x_1,\ldots,x_n(F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n))\wedge\neg(\exists x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}(F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n)\wedge F(x_{n+1})))$

(N_1,#) ‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt ein n derart gibt, dass gilt:

‚$\exists x_1,\ldots,x_n\ (F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n))\ \wedge\ \neg(\exists x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\ (F(x_1)\wedge\ldots\wedge F(x_n)\wedge F(x_{n+1})))$' ist wahr; und

‚$\exists y_1,\ldots,y_n\ (G(y_1)\wedge\ldots\wedge G(y_n))\ \wedge\ \neg(\exists y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}\ (G(y_1)\wedge\ldots\wedge G(y_n)\wedge G(y_{n+1})))$' ist wahr.

Hierbei entspricht (N_1,n) Wittgensteins Erklärung der Anzahloperatoren in (PG, S. 333 bzw. S. 356). Und auch Freges Erklärung der Anzahloperatoren in (1884, § 55) kann in etwa in diesem Sinn verstanden werden. Es sei in diesem Zusammenhang ferner bemerkt, dass es diese Wahrheitsbedingungsangaben im Prinzip offenlassen, ob für die Verifikation der entsprechenden Zahlaussagen durch den Gebrauch von Ziffern oder aber durch den Gebrauch der fraglichen Existenzaussagen gezählt wird. Es wäre also mit den fraglichen Wahrheitsbedingungsangaben vereinbar, beim Ausfindigmachen von Fs anstelle der Ziffern der Reihe nach die Existenzaussagen ‚$\exists\ x_1,...,x_k\ (F(x_1)\wedge...\wedge F(x_k))$‘ aufzusagen (und also zu erzeugen), um dann von der hierbei zuletzt geäußerten Existenzaussage in der Weise zu einer Zahlaussage überzugehen, wie die Wahrheitsbedingungsangaben es vorschreiben.

Es sei nun wieder angenommen, jeder für ein Zutreffen von ‚F‘ in Frage kommende Gegenstand habe genau einen Namen. In diesem Fall ist $U(F)=\{f_1,...,f_n\}$ gleichbedeutend damit, dass gilt: ‚$F(f_1)$‘ ist wahr, ... , ‚$F(f_n)$‘ ist wahr; und ‚$F(f_{n+1})$‘ ist falsch für jeden anderen Namen ‚f_{n+1}‘. Wenn die Zahlaussagen entsprechend der Nummerierungsmethode verwendet werden, dann können die entsprechenden Verifikationsregeln also durch die folgenden, auf *Prädikationen* bezogenen Wahrheitsbedingungsangaben kodifiziert werden:

(U_1,n_M) ‚$n_M(F)$‘ ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt n verschiedene Namen ‚f_1‘,..., ‚f_n‘ derart, dass gilt:
‚$F(f_1)$‘ ist wahr, ... , ‚$F(f_n)$‘ ist wahr.

(U_1,n) ‚$n(F)$‘ ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt n verschiedene Namen ‚f_1‘,..., ‚f_n‘ derart, dass gilt:
‚$F(f_1)$‘ ist wahr, ... , ‚$F(f_n)$‘ ist wahr; und
‚$F(f_{n+1})$‘ ist falsch für jeden anderen Namen ‚f_{n+1}‘.

$(U_1,\#)$ ‚$\#(F,G)$‘ ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt ein n derart, dass gilt:
Es gibt n verschiedene Eigennamen ‚f_1‘,..., ‚f_n‘ derart, dass gilt:
‚$F(f_1)$‘ ist wahr, ..., ‚$F(f_n)$‘ ist wahr; und
‚$F(f_{n+1})$‘ ist falsch für jeden anderen Namen ‚f_{n+1}‘.
Es gibt n verschiedene Eigennamen ‚g_1‘,..., ‚g_n‘ derart, dass gilt:
‚$G(g_1)$‘ ist wahr, ..., ‚$G(g_n)$‘ ist wahr; und
‚$G(g_{n+1})$‘ ist falsch für jeden anderen Namen ‚g_{n+1}‘.

Nun ist ‚$F(f_1)\wedge...\wedge F(f_n)$‘ offenbar äquivalent zu ‚$\forall x((x=f_1\vee...\vee x=f_n)\Rightarrow F(x))$‘. Und wenn ferner wieder angenommen wird, jeder für ein Zutreffen von ‚F‘ in Frage kommende Gegenstand habe genau einen Namen, dann ist ‚$\forall x((x=f_1 \vee ... \vee x=f_n) \Leftrightarrow F(x))$' genau dann wahr, wenn gilt: ‚$F(f_1)$' ist wahr, ... , ‚$F(f_n)$' ist wahr; und ‚$F(f_{n+1})$' ist falsch für jeden anderen Namen ‚f_{n+1}'.

Für die weiteren Untersuchungen sei nun zunächst die folgende Terminologie eingeführt: Ausdrücke der Form ‚$(x=f_1 \vee ... \vee x=f_n)$' sollen als *extensive Prädikate* bezeichnet werden. Ferner soll genau dann, wenn ‚$\forall x((x=f_1 \vee ... \vee x=f_n) \Leftrightarrow F(x))$' wahr ist, ‚$(x=f_1 \vee ... \vee x=f_n)$' das *Umfangsprädikat von ‚F'* genannt werden. Und schließlich sollen Aussagen der Form ‚$\forall x((x=f_1 \vee ... \vee x=f_n) \Leftrightarrow F(x))$' – also Aussagen, die behaupten, dass genau die f_1,...f_n den Umfang von ‚F' bilden – *Umfangsaussagen* heißen. Unter Rückgriff auf diese Terminologie kann also gesagt werden, dass, wer den Umfang von ‚F' bestimmt, damit feststellt, welche auf ‚F' bezogene Umfangsaussage wahr ist. Die auf der Umfangsbestimmung basierenden Verifikationsregeln der verschiedenen Zahlaussagen können daher auch durch die folgenden, auf *Umfangsaussagen* (bzw. auf die entsprechenden extensiven Prädikate) bezogenen Wahrheitsbedingungsangaben kodifiziert werden:

(U_2,n_M) ‚$n_M(F)$' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt n verschiedene ‚f_1',..., ‚f_n' derart, dass gilt:
‚$\forall x((x=f_1 \vee ... \vee x=f_n) \Rightarrow F(x))$' ist wahr.

(U_2,n) ‚n(F)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt n verschiedene ‚f_1',..., ‚f_n' derart, dass gilt:
‚$\forall x(F(x) \Leftrightarrow (x=f_1 \vee ... \vee x=f_n))$' ist wahr.

(U_2,#)‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt ein n derart, dass gilt:
Es gibt ‚f_1',..., ‚f_n' und ‚g_1',..., ‚g_n' derart, dass gilt:
‚$\forall x(F(x) \Leftrightarrow (x=f_1 \vee ... \vee x=f_n))$' ist wahr; und
‚$\forall y(G(y) \Leftrightarrow (y=g_1 \vee ... \vee y=g_n))$' ist wahr.

Durch Rückgriff auf die soeben eingeführte Terminologie sollen nun die folgenden drei Thesen Wittgensteins in Bezug auf die Anzahlen von Begriffen und Begriffsumfängen interpretiert und bewertet werden:

(T_1) Zahl ist die interne Eigenschaft eines Begriffsumfangs (PG, S. 332).
(T_2) Zahl ist die externe Eigenschaft eines Begriffs (PG, S. 332).
(T_3) Das Zahlzeichen gehört wesentlich zu einem Begriffszeichen (PG, S. 332; BGM, V §49).

Zunächst zur These *T_1*! Anzahloperatoren können in offensichtlicher Weise auch auf extensive Prädikate bzw. auf Umfangsprädikate bezogen werden. These *T_1* kann nun, wie es scheint, dahingehend interpretiert werden, dass Aussagen, die extensiven Prädikaten Anzahlen zuschreiben, *analytisch* sind. Diese These gilt offenbar nur unter den Voraussetzung, dass die beiden folgenden Bedingungen als analytische Regeln angenommen werden können: Zum einen bezieht sich jeder Name tatsächlich auf genau einen Gegenstand; und zum Anderen beziehen sich je zwei Namen auf verschiedene Gegenstände. In diesem Fall ist die Anzahl der Gegenstände, auf welche ein extensives Prädikat zutrifft, identisch mit der Anzahl der Namen, aus denen es gebildet ist. Die fragliche Anzahl wäre dann ein formales Merkmal – und somit ein Identitätskriterium – des Prädikats.

Es ist allerdings zu bemerken, dass die für die Geltung von T_1 erforderlichen Voraussetzungen alles andere als unproblematisch sind. Denn, dass, z.B., je zwei Namen ‚a' und ‚b' verschiedene Gegenstände bezeichnen, und dass entsprechende extensive Prädikat ‚$x=a \vee x=b$' somit tatsächlich auf zwei – und nicht etwa nur auf einen Gegenstand – zutrifft, ist im Normalfall nicht analytisch einzusehen. Die Eindeutigkeit des Bezugs von Eigennamen kann nur gesichert werden, wenn vor jeder Namensvergabe zunächst geprüft werden, ob dem fraglichen Gegenstand nicht bereits ein Name zugeordnet wurde.

These *T_2* kann nun in der Weise gedeutet werden, dass Anzahlaussagen, welche sich auf „echte" Prädikate beziehen, *synthetisch* sind. Diese These erscheint zwar deutlich weniger problematisch als noch T_2. Dennoch sollte auch sie in der folgenden Weise abgeschwächt werden: Zahl ist *typischerweise* die externe Eigenschaft eines Begriffs. Denn wie Wittgensteins eigenes Beispiel der Ecken des Drudenfusses in (BGM, I §27) zeigt, kann die Zahl eines Begriffs verschiedentlich durchaus aus dem Begriff (bzw. einem entsprechenden Paradigma) abgleitet werden.

These T_3 kann nun zunächst durch eine genauere Exegese der beiden genannten Textstellen ein Stück weit präzisiert werden. Zum einen geht aus der fraglichen Stelle in PG hervor, dass das Zahlzeichen wesentlich zu einem Begriffszeichen im Gegensatz zu einem Umfangszeichen gehören solle. Zum anderen wird an der Stelle in BGM ergänzt, dass ein Zahlzeichen nur in Verbindung mit einem Begriffszeichen ein Maß sein solle. Diese beiden Präzisierungen scheinen darauf hinzudeuten, dass T_3 eigentlich nur die beiden Thesen T_1 und T_2 zusammenfasst, wonach also nur diejenigen Anzahlaussagen, welche durch ein echtes Prädikat (Begriffszeichen) gebildet sind, synthetisch – und somit durch eine Art Messung der Wirklichkeit – zu verifizieren sind. Dementsprechend kann T_3 wieder nur bedingt zugestimmt werden. Denn, wie zuvor erläutert, sind auch auf extensive Prädikate bezogene Anzahlaussagen typischerweise synthetisch.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll nun noch eine weitere Möglichkeit der Kodifikation der auf der Umfangsbestimmung basierenden Verifikationsmethode von Zahlengleichheitsaussagen dargestellt werden. Hierfür sei zunächst definiert, dass Ausdrücke der Form ‚$(x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n)$' als *extensive Relationen* bezeichnet werden sollen. Nun gilt: Wenn sowohl ‚$\forall x(F(x) \Leftrightarrow (x=f_1 \vee ... \vee x=f_n))$' als auch ‚$\forall y(G(y) \Leftrightarrow (y=g_1 \vee ... \vee y=g_n))$' wahr ist, dann sind die F und G 1-1 bezüglich der entsprechenden extensiven Relation ‚$(x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n)$'; d.h. es sind in diesem Fall auch die Aussagen ‚$\forall x(F(x) \Rightarrow \exists! y\ (G(y) \wedge ((x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n))$' und ‚$\forall y(G(y) \Rightarrow \exists! x\ (F(x) \wedge ((x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n))$' wahr. Es kann demnach gesagt werden: wenn man in der Weise feststellt, dass ‚#(F,G)' wahr ist, dass man feststellt, dass $U(F)=\{f_1,...,f_n\}$ und $U(G)=\{g_1,...,g_n\}$, so stellt man damit auch fest, dass ‚F' und ‚G' 1-1 bezüglich der den Umfängen U(F) und U(G) entsprechenden extensiven Relation ‚$(x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n)$' sind. Aus diesem Grund ließe sich die auf der Umfangsmethode basierende Verifikation von Zahlengleichheitsaussagen auch durch eine der folgenden beiden, auf extensive Relationen bezogenen Wahrheitsbedingungsangaben kodifizieren:

(U_3,#) ‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt ein n derart gibt, dass gilt:
Es gibt n ‚f_1',..., ‚f_n' und n ‚g_1',..., ‚g_n', derart, dass gilt:
‚$\forall x(F(x) \Rightarrow \exists! y\ (G(y) \wedge ((x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n))$' ist wahr; und
‚$\forall y(G(y) \Rightarrow \exists! x\ (F(x) \wedge ((x=f_1 \wedge y=g_1) \vee ... \vee (x=f_n \wedge y=g_n))$' ist wahr.

(U_4,#) ‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt eine *extensive* Relation R derart, dass gilt:
‚F' und ‚G' sind 1-1 bezüglich R.

4.5 Bekanntlich versuchen Frege und Russell die Bedeutungserklärungen aller Zahlaussagen – also insbesondere auch die der Anzahlaussagen – auf einer Erklärung der Zahlengleichheit gemäß *Humes Prinzip* zu basieren. In der hier verwendeten Notation ließe sich diese Erklärung wie folgt formulieren:

(HP) ‚#(F,G)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Relation R derart, dass gilt:
‚F' und ‚G' sind 1-1 bezüglich R.

In diesem Abschnitt soll nun sowohl HP selbst als auch die hieran durch Waismann (in 1936) und Wittgenstein (in *PG*) geübte Kritik untersucht werden.

Zunächst hängt das Verständnis von HP offenbar wesentlich von dem hierbei unterstellten Relationsbegriff ab, also genauer davon, ob auch die extensiven Relationen als Relationen im Sinn von HP gelten sollen. Wie von Wittgenstein zu Recht bemerkt, setzt die Bezeichnung der extensiven Relationen als Relationen eine nicht sonderlich natürliche Erweiterung des umgangssprachlichen Relationsbegriffs voraus. Denn dass zwei Gegenstände z.B. in der extensiven Relation ‚x=a∧y=b' zueinander stehen, bedeutet ja nicht mehr, als dass der eine den Namen ‚a' und der Andere den Namen ‚b' trägt (vgl. VGM, XVII). Und im gewöhnlichen Sinn der Wortes ‚Relation' würde man nicht allein aufgrund eines solchen Umstands sagen, dass die fraglichen Gegenstände in Relation zueinander stehen. Ebenso würde umgekehrt niemand, dem gesagt wird, dass die von ‚a' und ‚b' bezeichnet Gegenstände in Relation zueinander stehen, dabei an ‚x=a∧y=b' oder irgendeine andere extensive Relation denken. Aus diesem Grund soll daher im Folgenden die auch von Wittgenstein in PG gewählte Vorgehensweise befolgt werden, bei der Untersuchung und Bewertung von HP jeweils danach zu unterscheiden, ob zu den in HP genannten Relationen auch die extensiven Relationen zählen sollen oder nicht.

Es sei nun zunächst angenommen, dass sich HP *nicht* auch auf extensive Relationen bezieht! Wie Wittgenstein und Waismann zu Recht betonen, gilt unter dieser Voraussetzung zwar, dass daraus, dass eine Relation 1-1 bezüglich ‚F' und ‚G' ist, folgt, dass die F und G zahlengleich sind; jedoch impliziert umgekehrt die Zahlengleichheit der F und G nicht, dass irgendeine Relation 1-1 bezüglich ‚F' und ‚G' ist. Denn wie in Abschnitt 4.3 dargelegt wurde, ist das Bestehen einer 1-1 Beziehung zwischen den F und G zwar eine hinreichende Bedingung und damit ein *Kriterium* der Zahlengleichheit der F und der G; es handelt sich hierbei jedoch nicht um eine notwendige Bedingung.

Ein sich an diese Beobachtung anschließender Einwand gegen HP, der sich bei Waismann ausdrücklich und bei Wittgenstein etwas weniger ausdrücklich findet, lautet nun wie folgt: Zur Feststellung der Zahlengleichheit werden verschiedene Kriterien und nicht *nur* das von HP spezifizierte Kriterium verwendet. Und eine akkurate Erklärung der Zahlengleichheit muss im Prinzip *alle* diese Kriterien nennen. Als Beispiele alternativer Kriterien wird dabei nicht nur das Zählen, sondern auch eine Art *visuelles* Kriterium genannt. Hiernach könne in dem Fall, dass sich alle F und alle G im Gesichtsfeld befinden, deren Zahlengleichheit auch durch bloßes Hinschauen verifiziert werden, solange entweder die Anzahlen der F und G gering genug sind oder aber die F und G in einer geeigneten Weise angeordnet sind (vgl. Waismann 1936, S. 104; Wittgenstein PG, S. 354).[2]

[2] Es handelt sich hierbei um die Art der Zahlbestimmung, welche im Englischen heutzutage als ‚subitizing' bezeichnet wird.

Für die Bewertung dieses Einwands müssen zunächst zwei Verhältnisse unterschieden werden, in denen zwei (verschiedene) Kriterien zueinander stehen können. Zum einen können zwei Kriterien wechselseitig auseinander ableitbar sein, so dass ihre Anwendung in jeden Fall zu demselben Ergebnis führen muss. In diesem Sinn sind also wieder die Gleichwinkligkeit und die Gleichseitigseitigkeit von Dreiecken wechselseitig auseinander ableitbar. Analog hierzu gilt etwa auch für alle geradlinig begrenzten Figuren, dass auch die Anzahl ihrer Ecken und ihre Innenwinkelsummen wechselseitig auseinander ableitbar sind.

Zum Anderen können zwei Kriterien logisch unabhängig voneinander sein, so dass ihre Anwendung auch zu verschiedenen Ergebnissen führen kann. Da etwa ‚x ist ein Jude' gleichbedeutend mit ‚x hat eine jüdische Mutter oder x ist zum Judentum konvertiert' ist, kann man sagen, dass es zwei nicht wechselseitig auseinander ableitbare Kriterien dafür gibt, ein Jude zu sein, nämlich, eine jüdische zu Mutter haben und zum Judentum konvertiert zu sein. Und nun ist klar: wenn es, wie in diesem Fall, zwei nicht auseinander ableitbare Kriterien für die Anwendung eines Ausdrucks gibt, dann muss eine adäquate Erklärung dieses Ausdruck auch beide Kriterien angeben. Denn die Orientierung an nur einem der beiden Kriterien kann in einem solchen Fall zu einer Fehlanwendung des fraglichen Ausdrucks führen. Wem nur erklärt wird, dass Jude ist, wer eine jüdische Mutter hat, wird die konvertierten Juden nicht als Juden bezeichnen.

Wenn ein Kriterium dagegen aus einem in einer Bedeutungserklärung gegebenen Kriterium ableitbar ist, dann braucht das ableitbare Kriterium in der Anwendung des erklärten Ausdrucks im Prinzip nicht berücksichtigt werden. Und aus diesem Grund muss es in der Erklärung des Ausdrucks auch nicht ausdrücklich angegeben werden. Wenn also etwa durch eine entsprechende Winkelmessung bereits die Verschiedenheit zweier Innenwinkel eines Dreiecks festgestellt wurde, so ist keine Längenmessung der Seiten des Dreiecks für die Feststellung erforderlich, dass der Ausdruck „gleichwinklig' nicht auf es zutrifft. Dass die Gleichwinkligkeit eines Dreiecks aus seiner Gleichseitigkeit ableitbar ist, bedeutet, dass die Gleichseitigkeit ein *alternatives* und kein zusätzliches Kriterium der Gleichwinkligkeit ist.

Ist ein Kriterium aus einem in einer Bedeutungserklärung gegebenen Kriterium ableitbar, so ist es auch selbst implizit durch die Erklärung gegeben. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, kann die explizite Angabe eines solchen Kriteriums – z.B. in Form einer Implikationsregel – dann zwar als eine sekundäre Bedeutungserklärung verstanden werden. Aber eine (primäre) Bedeutungserklärung ist nicht erst dann akkurat, wenn sie alle ableitbaren Kriterien *explizit angibt*, sondern bereits dann, wenn sich aus ihr alle Kriterien – und damit alle entsprechenden sekundären Erklärungen – *ableiten* lassen. So ist es z.B. natürlich akkurat, den Begriff des n-Ecks nicht durch (expliziten) Bezug auf Innenwinkelsummen zu definieren. Eine Bedeutungserklärung ist vielmehr nur dann inadäquat, wenn die Verwendung des zu erklärenden Ausdrucks durch ein Kriterium bestimmt ist, dass in der Erklärung weder explizit noch implizit gegeben ist.

Zahlengleichheitskriterien müssen nun stets wechselseitig auseinander ableitbar sein. Das bedeutet: ein Kriterium wird nur dann als ein (neues) Kriterium der Zahlengleichheit akzeptiert, wenn sich einsehen lässt, dass seine Anwendung stets mit der Anwendung der alten Kriterien übereinstimmen muss. So wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Zahlengleichheit zwar durch verschiedene Verifikationsmethoden – wie z.B. das Nummerieren oder das Zuordnen – und in diesem Sinn also durch Bezug auf verschiedene Kriterien erklärt werden kann. Doch die Bedingung der Möglichkeit eines solchen Bezugs auf verschiedene Kriterien war natürlich, dass jeweils die Möglichkeit ausgeschlossen werden konnte, dass zwei Begriffe zahlengleich gemäß des Einen, nicht jedoch gemäß des Anderen Kriteriums sind. Und weil je zwei Zahlengleichheitskriterien in diesem Sinn wechselseitig ableitbar sein müssen, kann auch HP nicht deshalb kritisiert werden, weil es nur *ein* Kriterium der Zahlengleichheit nennt.

Ferner ist auch die Darstellung der Verifikation der Zahlengleichheit durch das bloße Hinsehen zu kritisieren. Denn es erscheint irreführend, zu sagen, es würden jeweils verschiedene Kriterien der Zahlengleichheit angewendet, wenn diese z.B. durch das Zählen oder aber durch das bloße Hinschauen verifiziert wird. Das Sehen steht nicht im Gegensatz zum Zählen sondern etwa zum Hören oder Tasten. Es bezeichnet nicht ein Kriterium, sondern betrifft bestenfalls die *Art und Weise*, in der ein Kriterium *angewendet* wird. So könnte man etwa zwischen einem auf dem Hinsehen basierenden Zählen und einem ertastenden Zählen unterscheiden. Auch dann, wenn eine Aussage durch bloßes Hinsehen verifiziert wird, kann sich die Rede von einem Kriterium also nicht auf das Hinsehen beziehen, sondern nur auf das, was dabei gesehen wird. Und es scheint, dass das, was man sieht, wenn man die Zahlengleichheit durch bloßes Hinsehen verifiziert, eben das ist, was das tatsächliche Zählen bzw. Zuordnen ergeben muss. Das bedeutet: der Unterschied zwischen der Verifikation der Zahlengleichheit durch das bloße Hinsehen bzw. durch das Zählen besteht nicht darin, dass in beiden Fällen verschiedene Kriterien angewendet würde; er besteht vielmehr darin, dass im Fall der Verifikation durch das bloße Hinsehen auf die tatsächliche Anwendung des Zählkriteriums verzichtet wird, da sich (durch bloßes Hinsehen) absehen lässt, wohin diese Anwendung führen würde.

In Abschnitt 4.3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass das logische Verhältnis von ‚#(F,G)' und ‚R ist 1-1 bezüglich F und G' dem Verhältnis zwischen Äquivalenzrelationen und Projektionsbeziehungen entspricht, und dass ‚#' aus diesem Grund durch eine Bestimmung der Art erklärt werden könnte, dass ‚#(F,G)' genau dann wahr ist, wenn es *möglich* ist, die F und die G derart in eine Relation R zu bringen, dass R 1-1 bezüglich F und G ist. Diese Möglichkeitserklärung kommt auch in Frage, wenn die extensiven Relationen nicht als Relationen bezeichnet werden. Und mit etwas Gewalt könnte HP auch im Sinn dieser Erklärung verstanden werden.

Zwar erwägt auch Waismann diese Interpretation von HP. Er kritisiert jedoch die entsprechende Möglichkeitserklärung der Zahlengleichheit in der folgenden Weise. Nach Waismann kann die Rede von Möglichkeiten ihrerseits in zweierlei Weise gedeutet werden. Entweder bezieht sie sich auf die *physischen Möglichkeiten* des Verifizierenden, was, wie er meint völlig „uninteressant" wäre (vgl. 1936, S. 102). Oder aber sie bezieht sich auf die *logische Möglichkeit* des Bestehens einer 1-1 Relation zwischen den F und den G. Dass das Bestehen einer solchen Relation logisch möglich ist, bedeutet aber nichts anderes, als dass die entsprechende Aussage ‚F und G sind 1-1 bzgl. R' synthetisch ist. Wird die Rede von der Existenz einer 1-1 Relation in diesem Sinn interpretiert, so bestimmt HP also, dass ‚#(F,G)' gleichbedeutend mit der logischen Aussage ‚„F und G sind 1-1 bzgl. R" ist synthetisch' ist. Unter dieser Interpretation ist HP natürlich abwegig. Denn da ‚F und G sind 1-1 bzgl. R' für so ziemlich alle ‚F' und ‚G' synthetisch ist, wären hiernach alle entsprechenden Zahlengleichheitsaussagen analytisch wahr (vgl. Waismann 1936, S. 104).

Waismanns Einwand trifft die Möglichkeitserklärung jedoch deshalb nicht, weil die Rede von Möglichkeiten hierin im Sinn einer *experimentellen* Möglichkeit zu verstehen ist; also als die Möglichkeit, einen bestimmten *Effekt* zu beobachten, nachdem man bestimmten *Startbedingungen* hergestellt hat: wenn man die F und die G in die Beziehung R zueinander bringt (und damit die Startbedingung erfüllt), dann lässt sich feststellen, dass R 1-1 (und nicht etwa 1-v) bezüglich der F und der G ist. In diesem experimentellen Sinn war ja auch die Rede von Möglichkeiten zu verstehen, wenn z.B. gesagt wird, dass zwei Gegenstände genau dann gleichlang sind, wenn es möglich ist, sie zur Deckung zu bringen. Auch in diesem Fall ist natürlich nicht gemeint, dass es logisch möglich, dass die beiden Gegenständen einander decken. Vielmehr bezieht sich die fragliche Möglichkeit auch hier auf den Ausgang eines entsprechenden Versuchs: wenn man sie aneinander legt – d.h. diese Lagebeziehung herstellt –, dann decken sie einander.

Richtig an Waismanns Einwand ist also nur der Punkt, dass die Zahlengleichheit nicht äquivalent dazu ist, dass die Rede von einer 1-1 Relation logisch möglich ist. Und mit Blick auf die Überlegungen aus Abschnitt 4.3 wäre hierbei hinzuzufügen, dass der eigentliche logische Zusammenhang zwischen der Zahlengleichheit und dem Bestehen von 1-1 Relationen darin besteht, dass die *Konjunktion* aus einer Zahlengleichheitsaussage und einer Aussage, die das Bestehen einer entsprechenden 1-1 Relation behauptet, logisch möglich ist. D.h.: nicht, dass F und G zahlengleich sind, ist ein grammatischer Satz; sondern der grammatische Satz lautet, dass die Zahlengleichheit von F und G vereinbar damit ist, dass F und G 1-1 bezüglich R sind. Wie ebenfalls in Abschnitt 4.3 bereits dargestellt wurde, scheint die Möglichkeitserklärung nur pragmatisch zu kritisieren zu sein, insofern für die allermeisten praktischen Zwecke nicht die direkte Zuordnung der F und der G in Frage käme, sondern bestenfalls die Zuordnung zu speziell für diesen Zweck verwendeten Gegenständen (wie etwa Abakuskugeln).

Es sei nun angenommen, dass sich die Rede von Relationen in HP auch auf extensive Relationen beziehe! In PG schlägt Wittgenstein nun zunächst vor, dass HP in diesem Fall auf die extensiven Relationen eingeschränkt werden solle (S. 356). Folgt man diesem Vorschlag, müsste HP also entweder durch (U_4,#) (aus Abschnitt 4.4) oder aber durch die entsprechende rekursive und von Wittgenstein selbst anscheinend anvisierte Formulierung ersetzt werden:

(HP_2) ‚#(F,G)' ist wahr ⇔ Eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:

(0) Es gibt kein F; und es gibt kein G.

(1) Es gibt eine Relation der Form ($x=f_1 \wedge y=g_1$), bzgl. derer ‚F' und ‚G' 1-1 sind.

(2) Es gibt eine Relation der Form ($x=f_1 \wedge y=g_1$) ∨ ($x=f_2 \wedge y=g_3$), bzgl. derer ‚F' und ‚G' sind 1-1.

etc.

Dieser Modifikationsvorschlag Wittgensteins erscheint aus zwei Gründen berechtigt. Zum einen ist die Existenz einer extensiven 1-1 Relation sowohl notwendig als auch hinreichend für die Zahlengleichheit, so dass also die Berücksichtigung „echter" Relationen überflüssig ist. Zum anderen kodifiziert erst die aus dieser Beschränkung resultierenden Erklärung in eindeutiger Weise eine bestimmte Verifikationsmethode, nämlich die Umfangsmethode.

Wittgensteins nächste These lautet dann, dass zu sagen, dass eine der Bedingungen aus HP_2 bestehe, nichts anderes heiße, als dass eine der Aussagen ‚$0(F) \wedge 0(G)$', ‚$1(F) \wedge 1(G)$', etc. wahr sei (vgl. PG, S. 356). Diese These scheint er in zwei Schritten begründen zu wollen. Zum einen verweist er auf das bereits in Abschnitt 4.4 dargestellte Prinzip, wonach, dass eine Relation der Form ‚($x=f_1 \wedge y=g_1$) ∨ ... ∨ ($x=f_n \wedge y=g_n$)' 1-1 bzgl. der ‚F' und ‚G' ist, äquivalent dazu ist, dass die Aussage ‚$\exists\, x_1,...,x_n\ (F(x_1) \wedge ... \wedge F(x_n)) \wedge \neg \exists\, x_1,...,x_{n+1}\ (F(x_1) \wedge ... \wedge F(x_{n+1})) \wedge \exists\, y_1,...,y_n\ (G(y_1) \wedge ... \wedge G(y_n)) \wedge \neg \exists\, y_1,...,y_{n+1}\ (G(y_1) \wedge ... \wedge G(y_{n+1}))$' wahr ist. Zum Anderen unterstellt er die von ihm zuvor erläuterte *Möglichkeit*, die Anzahloperatoren gemäß (N_1,n) (aus Abschnitt 4.4) durch Bezug auf entsprechende Existenzaussagen zu definieren.

Auch wenn die beiden Begründungsschritte einwandfrei erscheinen, ist dennoch nicht ganz klar, was aus der fraglichen These eigentlich folgen soll. Man kann zunächst sagen, dass die Formulierung HP_2 und die fragliche These Wittgensteins auf zwei wichtige und durch HP weniger deutlich werdende Punkte aufmerksam machen. Das ist zum einen der Punkt, dass auch die Angabe der Wahrheitsbedingungen von Zahlengleichheitsaussagen durch Bezug auf extensive Relationen als die Spezifizierung einer *Folge* von Bedingungen aufzufassen ist. Denn da die extensiven Relationen durch ihre Bildung (und also durch ihre Länge) geordnet sind, ist auch die Existenz irgendeiner extensiven 1-1 Relation so zu verstehen, dass eine extensive Relation einer bestimmten Länge besteht. Unter der Voraussetzung, dass die Anzahloperatoren bereits geeignet erklärt sind, kann daher das Bestehen einer Bedingung dieser Art in der Tat auch als das Bestehen der Wahrheitsbedingung entsprechender Anzahlaussagen aufgefasst werden. Daher könnte man also zum Anderen mit gewissem Recht sagen, dass – analog zu der von Wittgenstein favorisierten Erklärung (N_1, #) – auch HP bzw. HP_2 die Zahlengleichheit zumindest implizit durch die Identität der Anzahlen erklärt.

Dieser Punkt spricht nun zwar nicht gegen HP selbst. Man könnte jedoch anzunehmen versucht sein, dass er die Zirkularität der von Frege und Russell verfolgten Erklärungsstrategie zeige, wonach die Anzahlaussagen durch die Zahlengleichheitsaussagen erklärt werden sollten. – Ob Wittgenstein tatsächlich diesen Zirkularitätseinwand im Sinn hat, geht aus PG allerdings nicht eindeutig hervor. – Denn die Idee liegt nahe, dass (HP_2) eigentlich wie folgt auszuformulieren sei:

(HP_3) ‚#(F,G)' ist wahr ⇔ Eine der folgenden Aussagen ist wahr:

(0) $0(F) \wedge 0(G)$

(1) $1(F) \wedge 1(G)$

(2) $2(F) \wedge 2(F)$

etc.

Ein solcher Zirkeleinwand wäre jedoch nicht haltbar. Denn die ursprüngliche Wahrheitsbedingungsangabe HP_2 setzt offenbar nicht die vorherige Einführung der Anzahloperatoren, sondern nur die Einführung der extensiven Relationen voraus. Wie in Abschnitt 4.4 dargelegt wurde, wäre es zwar *möglich*, die Anzahloperatoren auch unabhängig von HP_2 durch Bezug auf die den extensiven Relationen entsprechenden extensiven Prädikate zu erklären, so dass dann also HP_2 im Prinzip auch zu HP_3 umgeformt werden könnte. Ein solches Vorgehen ist jedoch nicht notwendig.

Zum Abschluss dieses Anschnitts kann nun also in Bezug auf HP und die darauf basierende Erklärungsstrategie aller Zahlaussagen das folgende Fazit gezogen werden: Wenn sich die Rede von Relationen in HP nur auf echte Relationen – und also nicht auch auf die extensiven Relationen – bezieht, dann kommt überhaupt nur die Deutung von HP im Sinn der

Möglichkeitserklärung in Frage.[3] Denn wie bereits mehrfach betont, impliziert die Zahlengleichheit nicht das *tatsächliche* Bestehen einer 1-1 Relation, so dass also HP bei dieser Deutung als logische Regel ungültig und insofern auch als Bedeutungserklärung des Zahlengleichheitsoperators ungeeignet ist. Im Übrigen eignet sich HP unabhängig hiervon auch deshalb nur bedingt als Bedeutungserklärung, weil aus HP nicht unmittelbar ersichtlich wird, welche Verifikationsmethode hierdurch kodifiziert werden soll. Denn das von HP nahegelegte unsystematische Überprüfen beliebiger Relationen daraufhin, ob sie (zufälligerweise) 1-1 bezüglich ‚F' und ‚G' sind, kann mitnichten als eine Verifikations*regel* bezeichnet werden.

Wenn sich die Rede von Relationen auch auf die extensiven Relationen beziehen soll – ein Punkt, der sich, wie zuvor erläutert, durchaus nicht von selbst versteht –, dann kann HP als eine mehr oder weniger klare Kodifikation der Umfangsmethode für die Verifikation von Zahlengleichheitsaussagen aufgefasst werden. Zwar ist Wittgenstein darin Recht zu geben, dass die Zahlengleichheit in diesem Fall zumindest *implizit* als Identität der Anzahlen zu verstehen ist. Denn bei der Feststellung, dass eine extensive Relation 1-1 bezüglich ‚F' und ‚G' ist, werden stets auch die Umfänge von ‚F' und ‚G' und damit (implizit) auch deren Anzahlen ermittelt. Dennoch ist die Fregesche (bzw. Russelsche) Strategie, die Anzahlaussagen durch Bezug auf HP zu erklären, weder bei dieser Deutung von HP zirkulär, noch bei der Deutung von HP im Sinn der Möglichkeitserklärung.

Doch auch wenn es kein logisches Problem für diese Erklärungsstrategie gibt, so könnte dennoch die Zweckmäßigkeit dieser Strategie in Frage gestellt werden. Denn die Verifikationsmethoden, welche gegebenenfalls durch HP kodifiziert werden – also das wechselseitige Zuordnen von Gegenständen bzw. Namen – spielen in der Alltagspraxis nur eine untergeordnete Rolle; d.h. sie kommen bestenfalls dann zum Einsatz, wenn besondere Umstände ihre Anwendung nahelegen. Wie schon zu Ende von Abschnitt 4.3 bemerkt wurde, besteht die kanonische Methode der Verifikation von Zahlengleichheitsaussagen natürlich darin, die fraglichen Gegenstände (transitiv) zu zählen. Das bedeutet insbesondere, dass die Zahlwörter innerhalb der tatsächlichen Verifikationspraxis einen weit größeren Stellenwert haben als ihnen im Rahmen der Fregeschen und Russellschen Erklärungsstrategie zugeschrieben wird. Denn ihre tatsächliche Funktion reduziert sich nicht auf die Formulierung bestimmter Verifikationsergebnisse; vielmehr bildet ihre Verwendung (im transitiven Zählen) einen konstitutiven Bestandteil der Verifikation aller Zahlaussagen. Da somit nicht beansprucht werden kann, dass sich die tatsächliche Verwendung von Zahlengleichheitsaussagen typischerweise in der

[3] Ist diese Deutung beabsichtigt, sollte hierfür allerdings eine geeignetere Formulierung als (HP) hierfür gewählt werden.

von HP kodifizierten Weise gestaltet, kann die besondere Betonung von HP als Grundlage der Semantik aller Zahlaussagen also nur rein theoretischen Zwecken dienen.

5. Abstrakte Sortale

Ein Argument gegen die Autonomie der Arithmetik beruht auf der Annahme, der Ausdruck ‚Zahl' stünde für eine bestimmte Art von Gegenständen. Denn diese Annahme legt die Auffassung nahe, dass die Wahrheit arithmetischer Aussagen von der Existenz und der Beschaffenheit dieser Gegenstände abhängig ist. Auf der Grundlage einer allgemeinen Analyse der Verwendung sogenannter abstrakter Sortale soll in diesem Kapitel daher die Irrigkeit dieser Annahme gezeigt werden. So soll in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels zunächst dafür argumentiert werden, dass abstrakte Sortale wie ‚Farbe', ‚Länge' oder eben ‚Zahl' nicht für bestimmte Gegenstandsarten stehen, sondern bestimmte Vergleichsbeziehungen ausdrücken. In den Abschnitten 5.3-5.7 soll diese Auffassung abstrakter Sortale durch eine kritische Auseinandersetzung mit der von Wright entwickelten neologizistischen Konzeption präzisiert und verteidigt werden. Dieser Auffassung zu Folge widerspricht die Möglichkeit, abstrakte Sortale durch Bezug auf entsprechende Vergleichsbeziehungen zu erklären, nicht der Annahme, dass diese Ausdrücke für bestimmte Arten abstrakter Gegenstände stünden. Vielmehr ließe sich auf der Grundlage solcher Erklärungen für die Existenz und Zugänglichkeit der fraglichen abstrakten Gegenstände argumentieren. Nach einer Darstellung der neologizistischen Konzeption in Abschnitt 5.3 sowie einer Kritik ihrer semantischen Grundannahmen in Abschnitt 5.4 sollen daher in den Abschnitten 5.5-5.7 auch diese ontologischen und epistemologischen Thesen diskutiert werden.

5.1 In Abschnitt 1.5 wurde der Begriff des *Sortals* eingeführt. Hiernach wurde ein einstelliges Prädikat für raumzeitliche Gegenstände genau dann als Sortal bezeichnet, wenn das Prädikat nach der Teilung eines Gegenstands, auf den es zutrifft, nur noch auf höchstens einen der Teile weiterhin zutrifft. Wenn die Anwendbarkeit eines Prädikats einer solchen Teilungsregel unterliegt, so bestimmt das Prädikat Regeln dafür, einen Gegenstand, auf den das Prädikat bei einer bestimmten Gelegenheit zutrifft, raumzeitlich nachzuverfolgen und wiederzuerkennen. Unter dieser Bedingung ist folglich der Sinn der Rede von der (raumzeitlichen) Identität sowie der Anzahl von Gegenständen, auf die ein solches Prädikat zutrifft, bestimmt. Ein Sortal kann somit auch als Ausdruck einer bestimmten *Gegenstandsart* aufgefasst werden.

In der Fachliteratur werden Ausdrücke, welche in diesem Sinn Sortale sind, als *konkrete* Sortal bezeichnet und den sogenannten *abstrakten Sortalen* gegenübergestellt (vgl. z.B. Wright 1983, S. 1-6). Unter Ausdrücken letzterer Art werden dabei im wesentlichen Substantive verstanden, in Bezug auf welche die Rede von Identität und Anzahl zwar sinnvoll ist, deren grundlegende Verwendung jedoch nicht in der Anwendung auf konkrete – also raumzeitliche – Gegenstände besteht. Die Verwendung abstrakter Sortale, zu denen unter anderem Ausdrücke wie ‚Farbe', ‚Richtung', ‚Länge', ‚Masse', und ‚Zahl' gezählt werden, kann daher insbesondere nicht durch die für konkrete Sortale charakteristische Teilungsregel charakterisiert werden.

Die Verwendung abstrakter Sortals soll nun anhand einer Untersuchung vier verschiedener Satzarten analysiert werden. Im Folgenden sei dabei jeweils ‚Q' als Variable für abstrakte Sortale – wie eben etwa ‚Farbe' oder ‚Länge' – benutzt. Die vier Satzformen lassen sich dann wie folgt darstellen. (1) Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b', wobei ‚a' und ‚b' singuläre Terme – also Demonstrativa, Namen oder Kennzeichnungen – für raumzeitlichen Gegenstände sind. (2) Aussagen der Form ‚Das Q von a ist Q_i', wobei ‚Q_i' für ein (nominalisiertes) Äquivalenzprädikat steht, welcher ‚Q' entspricht. (3) Aussagen der Form ‚Q_i ist ein Q'; und (4) Fragen der Form ‚Welches Q hat a?'. Während in diesem Abschnitt gezeigt werden soll, dass die semantische Funktion eines abstrakten Sortal in all diesen Kontexten darin besteht, eine bestimmte *Vergleichsbeziehung* für konkrete Gegenstände auszudrücken, soll im nächsten Abschnitt auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten in der Verwendung abstrakter und konkreter Sortale eingegangen werden.

Wie allgemein anerkannt wird, lassen sich Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b' in der Weise paraphrasieren, dass das Substantiv ‚Q' durch ein entsprechendes Adjektiv ‚q' ersetzt wird. So kann man etwa stets ‚a ist farbgleich mit b' anstelle von ‚a hat dieselbe Farbe wie b' sagen; und ‚a hat dieselbe Länge wie b' kann durch ‚a ist ebenso lang wie b' paraphrasiert werden. Paraphraseregeln dieser Art können also wie folgt schematisiert werden:

(1) ‚a hat dasselbe Q wie b' bedeutet dasselbe wie ‚a ist q zu b'.

Hierbei ist zu bemerken, dass man anstelle von ‚a hat dasselbe Q wie b' auch die Formulierung ‚Das Q von a ist identisch mit dem Q von b' gebrauchen kann. In diesem Sinn kann also zum Beispiel anstelle der Aussage ‚a ist farbgleich mit b' stets die Aussage ‚a hat dieselbe Farbe wie b' oder aber die Aussage ‚Die Farbe von a ist identisch mit der Farbe von b' verwendet werden. Die Paraphraseregel (1) erlaubt es somit, Aussagen, die behaupten, dass zwei Gegenstände in einer bestimmten Äquivalenzrelation zueinander stehen, durch Aussagen zu paraphrasieren, welche die Identität der entsprechenden Äquivalenzeigenschaften behaupten.

Analoge substantivische Paraphrasen stehen im Übrigen auch für Zahlengleichheitsaussagen zur Verfügung. So kann ‚Es gibt ebenso viele F wie G' nominal durch ‚Die F haben dieselben Anzahl wie die G' oder durch ‚Die Anzahl der F ist identisch mit der

Anzahl der G‘ ausgedrückt werden. Der Einfachheit halber werden sich folgenden Analysen aber an den Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b‘ orientieren.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die in (1) einander zugeordneten substantivischen und adjektivischen Redeweisen nicht nur äquivalent, sondern *bedeutungsgleich* sind. Das heißt, dass substantivisch und adjektivisch formulierte Aussagen nicht jeweils verschiedene Verifikationsregeln haben, von denen sich zeigen lässt, dass ihre Anwendung stets zu demselben Ergebnis führen muss. Vielmehr haben Aussagen beider Art jeweils *dieselbe Verifikationsregel*. So werden also etwa die Aussagen ‚a ist ebenso lang wie b‘ und ‚a hat dieselbe Länge wie b‘ jeweils in ein und derselben Weise verifiziert; nämlich dadurch, dass die beiden Bezugsgegenstände von ‚a‘ und ‚b‘ identifiziert und dann entweder miteinander oder mit bestimmten Längenparadigma *verglichen* werden. Und analog hierzu, werden auch ‚a hat dieselbe Farbe wie b‘ und ‚a ist farbgleich zu b‘ jeweils in derselben Weise – nämlich durch einen Farbvergleich der Bezugsgegenstände von ‚a‘ und ‚b‘ – verifiziert.

Die allgemeine These, wonach ein abstraktes Sortal in jedem Kontext eine bestimmte *Vergleichsbeziehung* (bzw. Äquivalenzrelation) ausdrückt, kann also zumindest in Bezug auf die Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b‘ als bestätigt gelten. Denn der durch ‚Q‘ bestimmte Schritt in der Verifikation dieser Aussage besteht jeweils in einem spezifischen Vergleich zweier konkreter Gegenstände. Analog hierzu bestimmt das abstrakte Sortal ‚Anzahl‘ in Aussagen der Form ‚Die F haben dieselbe Anzahl wie G‘ denselben Verifikationsschritt wie der Ausdruck ‚ebenso viele‘ in ‚Es gibt ebenso viele F wie G‘, nämlich die entsprechende Methode der Zahlengleichheitsfeststellung, also etwa das transitive Zählen oder das Zuordnen der F und G.

Es sei an dieser Stelle noch knapp auf die durch Sortale gebildeten Anzahlaussagen der Form ‚Die F haben n verschiedene Q‘ eingegangen. – Ein Beispiel für Aussagen dieser Art wäre etwa ‚Die Jacken in meinem Schrank haben 3 verschiedene Farben‘. – Hierbei ist zunächst anzumerken, dass Aussagen über die Anzahl konkreter Gegenstände eng mit Identitäten über konkrete Gegenstände zusammen hängen. Denn bei der Verifikation einer solchen Anzahlaussage durch die Methode des transitiven Zählens wird ein gegebener Gegenstand jeweils nur dann gezählt, wenn er mit keinem der zuvor bereits gezählten Gegenstände identisch ist. Analog hierzu müssen auch für die Verifikation einer Aussagen der Form ‚Die F haben n verschiedene Q‘ F ausfindig gemacht und gezählt werden. Allerdings wird in diesem Fall ein gegebenes F nicht schon dann gezählt, wenn es mit keinem der bereits gezählten F raumzeitlich identisch ist. Es wird vielmehr nur dann gezählt, wenn unter den zuvor gezählten F keines ist, das in der durch Q bestimmten Hinsicht qualitativ identisch zum gegebenen F ist. – Wenn die Farben der Jacken gezählt werden, dann ist also bei einer gegebenen Jacke nur dann weiterzuzählen, wenn zuvor noch keine farbgleiche Jacke gegeben war. – Diese Verifikationsregel von Aussagen der Form ‚Die F haben n verschiedene Q' kann demnach durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe kodifiziert werden:

> ‚Die F haben n verschiedene Q' ist wahr ⇔ Es gibt genau n F derart, dass gilt:
> Die fraglichen F sind paarweise Q-verschieden; und
> jedes weitere F ist Q-identisch mit einem dieser F.

Auch im Fall dieser Aussagen steht das abstrakte Sortal ‚Q' also für eine bestimmte Vergleichsbeziehung, in Bezug auf welche der entsprechende Zählvorgang reguliert ist.

Wie in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, wird der grundlegende logische Zusammenhang zwischen dem Ausdruck einer bestimmten Gleichheitsbeziehung ‚q' und den entsprechenden Äquivalenzprädikaten ‚Q_i' durch die folgende, für alle ‚Q_i' gültige Invarianzregel ausgedrückt: ‚a_1 ist Q_i ∧ a_1 ist q zu a_2' ist äquivalent zu ‚ a_1 ist Q_i ∧ a_2 ist Q_i'. Und wie dort ebenfalls erläutert wurde, beruht die Möglichkeit der wechselseitigen Erklärungen von Äquivalenzprädikaten und dem Ausdruck der entsprechenden Äquivalenzrelation auf dieser Regel. Aus diesem Grund können Äquivalenzprädikate einer bestimmen Art in der folgenden Weise durch Bezug auf die entsprechende Gleichheitsbeziehung charakterisiert werden:

> Ein Prädikat ‚F' ist ein Q-Prädikat ⇔ Für beliebige Gegenstände x und y gilt: Dass ‚F' auf x und y zutrifft ist äquivalent dazu, dass ‚F' auf x zutrifft, und x q zu y ist.

Hiernach ist also ein Prädikat ‚F' genau dann ein *Farb*prädikat, wenn die Anwendbarkeit von ‚F' auf x und y äquivalent mit Anwendbarkeit von ‚F' auf x und der Farbgleichheit von x und y ist. Und ebenso ist ‚F' genau dann ein *Längen*prädikat, wenn die Anwendbarkeit von ‚F' auf x und y äquivalent mit der Anwendbarkeit von ‚F' auf x und der Längengleichheit von x und y ist. Analog hierzu können im Übrigen auch die Anzahloperatoren wie folgt durch Bezug auf den Zahlengleichheitsoperator ‚#' charakterisiert werden:

> Ein Quantor ‚N' ist ein Anzahloperator ⇔ Für beliebige Prädikate ‚F' und ‚G' gilt: ‚N(F) ∧ #(F,G)' ist äquivalent zu ‚N(F) ∧ N(G)'

Wenn die Nominalisierung eines Prädikats ‚F' jeweils durch ‚f' notiert wird, so scheinen sich auf dieser Grundlage die Aussagen der Form ‚Q_i ist ein Q' durch die folgende Bestimmung erklären zu lassen:

(3) ‚f ist ein Q' bedeutet: ‚F' ist ein Q-Prädikat.

Da hiernach also etwa ‚Q_i ist eine Farbe' genau dann wahr ist, wenn ‚Q_i' ein nominalisiertes Farbprädikat ist, ist nach (2) somit z.B. ‚Rot ist eine Farbe' wahr und ‚1 Meter ist eine Farbe' falsch. Die Verifikation einer Aussagen der Form ‚f ist ein Q' besteht (3) zu Folge darin, sich darauf zu besinnen, ob ‚F' ein Q-Prädikat ist. Dabei macht die zuvor gegebene Definition des Ausdrucks ‚Q-Prädikat' dasjenige Kriterium explizit, anhand dessen man auch intuitiv zwischen Q-Prädikaten und anderen Ausdrücken unterscheiden würde. Auch in einer Aussage der Form ‚f ist ein Q' steht ‚Q' also für die Vergleichsbeziehung, durch Bezug auf welche diejenigen Prädikate identifizierbar sind, deren Nominalisierungen ‚ist ein Q' zu wahren Aussagen ergänzen. Wie sich sogleich zeigen wird, kann dafür, dass (3) tatsächlich in adäquater Weise die Verwendung von Aussagen der Form ‚f ist ein Q' darstellt, auch durch Bezug auf die *Anwendungen* argumentiert werden, die von Aussagen dieser Art gemacht werden.

Durch Bezug auf die erste Anwendung dieser Art lässt sich die Analyse von Aussagen der Form ‚Das Q von a ist Q_i' einleiten. Offenbar ist eine solche Aussage *sinnlos*, falls ‚Q_i' kein (nominalisiertes) Q-Prädikat ist. So handelt sich etwa bei Ausdrücken der Form ‚Die Länge von a ist rot' oder ‚Die Farbe von a ist 1 Meter' nicht um sinnvolle Aussagen. Da umgekehrt ‚Das Q von a ist Q_i' sinnvoll ist, falls ‚Q_i' ein nominalisiertes Q-Prädikat ist, gilt nach (3) also die folgende Regel:

‚Q_i ist ein Q' ist *wahr* ⇔ ‚Das Q von a ist Q_i' ist *sinnvoll*.

Diese Regel steht offenbar in Einklang mit dem umgangssprachlichen Gebrauch von Aussagen der Form ‚Q_i ist ein Q'. Denn sollte tatsächlich jemand einen sinnlosen Ausdruck in der Art von ‚Die Länge von a ist rot' äußern, würde es sich anbieten, auf die Sinnlosigkeit dieses Ausdrucks die Äußerung von ‚Rot ist keine Länge, sondern eine Farbe' hinzuweisen.

Eine Aussage der Form ‚Das Q von a ist Q_i' steht nun offenbar der entsprechenden einfachen Prädikation ‚a ist Q_i' nahe. So ist etwa ‚Die Farbe von a ist rot' genau dann wahr, wenn die entsprechende Prädikation ‚a ist rot' wahr ist. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass der Gebrauch des abstrakten Sortals ‚Farbe' in der ersten Formulierung gegenüber der einfachen Prädikation zumindest virtuell noch eine weitere Fehlermöglichkeit bestimmt. Aus diesem Grund ist eine Aussage der Form ‚Das Q von a ist Q_i' nicht in jedem Fall äquivalent zu der entsprechenden Prädikation ‚a ist Q_i', sondern nur dann, wenn ‚Q_i' ein Q-Prädikat ist. Ohne diese Bedingung bereits vorauszusetzen gilt also nur die folgende Regel:

Wenn ‚Q_i ist ein Q' *wahr* ist, ist ‚Das Q von a ist Q_i' *äquivalent* zu ‚a ist Q_i'.

Diese Überlegung legt also die folgende Analyse von Aussagen der Form ‚Das Q von a ist Qi' nahe:

(2) ‚Das Q von a ist Q_i' bedeutet dasselbe wie ‚a ist $Q_i \wedge Q_i$ ist ein Q'.

Hiernach sagen also z.B. ‚Die Farbe von a ist rot' und ‚a ist rot' dasselbe über die Wirklichkeit aus, insofern beide Aussagen genau dann wahr sind, wenn ‚rot' auf den Bezugsgegenstand von ‚a' zutrifft. Man könnte jedoch sagen, dass ‚Die Farbe von a ist rot' zusätzlich noch die semantische Wahrheit ausdrückt, dass ‚rot' ein Farbprädikat ist.

Da die Logik von Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b' und Aussagen der Form ‚Das Q von a ist Q_i' im weiteren Untersuchungsverlauf noch relevant werden wird, bietet es sich, die entsprechenden grundlegenden Prinzipien an dieser Stelle knapp darzustellen. Da Aussagen beiden Arten nach (1) und (2) äquivalent zu entsprechenden adjektivisch formulierten Aussagen sind, können diese Prinzipien aus den in Abschnitt 4.1 dargestellten Prinzipien angeleitet werden. Für die substantivischen Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b' und Aussagen der Form ‚Das Q von a ist Q_i' gelten demnach die folgenden drei grundlegenden Prinzipien:

(Q_1) ‚x_1 hat dasselbe Q wie x_2' ist eine Äquivalenzrelation und also reflexiv, symmetrisch und transitiv in Bezug auf x_1 und x_2.

Denn nach Voraussetzung ist auch ‚x_1 ist q zu x_2' reflexiv, symmetrisch und transitiv. In Bezug auf die substantivische Formulierung ‚Das x_1 von Q ist identisch mit dem Q von x_2' könnte man auch sagen, dass diese symmetrisch und transitiv in Bezug auf die (komplexen) Ausdrücke ‚Das Q von x_1' und ‚Das Q von x_2' sei. Ferner gilt:

(Q_2) ‚Das Q von a ist $Q_i \wedge$ Das Q von a ist Q_j' ist kontradiktorisch, falls ‚Q_i' und ‚Q_j' für verschiedene Äquivalenzeigenschaften stehen.

Wie bereits mehrfach erläutert wurde, lässt sich dieses Prinzip bzw. das auf die adjektivische Formulierung ‚a ist q_i und a ist q_j' bezogene Prinzip gegebenenfalls in der Weise beweisen, dass die den – substantivisch oder adjektivisch notierten – Qualitätstermen entsprechenden Paradigmen gemäß der fraglichen Projektionsmethode verglichen werden. In diesem Sinn ließe sich etwa durch die Feststellung der Farbverschiedenheit des Rot- und des Gelbtäfelchens beweisen, dass Aussagen der Form ‚Die Farbe von a ist Rot und die Farbe von a ist Gelb' kontradiktorisch sind.

(Q_3) ‚Das Q von a ist Q_i ∧ a hat dasselbe Q wie b' ist äquivalent zu ‚Das Q von a ist Q_i ∧ Das Q von b ist Q_i'.

Wie im Kapitel zuvor erläutert wurde, ist dieses Prinzip im Wesentlichen aus (Q_1) sowie dem Zusammenhang zwischen den Erklärungen von qualitativen Identitäten und Qualitäten abzuleiten.

Nun zuletzt zu den durch abstrakte Sortale gebildeten *Fragen*. Wie in Abschnitt 1.2 erläutert wurde, kann das auf dem Entscheidungsspiel beruhende Mitteilungsspiel als Frage-Antwort Spiel aufgefasst werden. Hierbei äußert Spieler 1 zunächst einen bestimmte Entscheidungsfrage ‚p?', woraufhin Spieler 2 ‚p' verifiziert, um daraufhin entweder ‚Ja' oder ‚nein' zu äußern. Wie dort bereits erläutert wurde, ist die Äußerung einer Entscheidungsfrage ‚p?' somit als eine *Aufforderung* zur Entscheidung von ‚p' zu verstehen. Anstatt durch ‚Ja' oder ‚Nein' könnte Sprecher 2 nun offenbar auch durch ‚p' bzw. ‚¬p' – oder auch durch ‚Es ist wahr, dass p' bzw. ‚Es ist falsch, dass p' – antworten. Und man könnte sagen, dass in diesem Fall die Äußerung von ‚p?' eine Aufforderung zur *Erzeugung* von ‚p' bzw. ‚¬p' darstellt. Es bietet sich nun an, die Verwendung von Fragen ganz allgemein wie folgt zu charakterisieren: Eine Frage ist eine Aufforderung zur Erzeugung einer Aussage aus einer durch die Frage bestimmten Antwortmenge. Dabei besteht dann also die durch einer Entscheidungsfrage ‚p?' bestimmte Antwortmenge jeweils aus zwei Elementen: ‚p' und ‚¬p'. Dagegen besteht die durch ein entsprechendes Sortal gebildete Frage der Form ‚Welches Q hat a?' aus den Aussagen, die aus der Kombination von ‚a' mit den verschiedenen Q-Prädikaten gebildet sind. Durch Bezug auf (3) lässt sich die Regel, welche den Zusammenhang zwischen einer solchen Frage – also einer Frage nach der Länge, Farbe, etc. eines bestimmten Gegenstands a – und ihren Antworten bestimmt, in der folgenden Weise darstellen:

(4) ‚a ist Q_i' ist eine Antwort auf ‚Welches Q hat a?' ⇔ ‚Q_i ist ein Q' ist wahr.

Hieraus ergibt sich zum einen, dass das abstrakte Sortal auch in der Frage ‚Welches Q hat a?' für die entsprechende Vergleichsbeziehung steht, welche ihrerseits die möglichen Antworten auf die Frage bestimmt. So ist also etwa die Fragen nach der Farbe von a in der Weise zu beantworten, dass ‚a' um ein Farbprädikat ergänzt wird, also ein Prädikat, dessen Anwendbarkeit im zuvor geschilderten Sinn invariant unter der Beziehung der Farbgleichheit ist. Antworten auf die Frage nach der Länge von a, sind dagegen Aussagen welche aus der Ergänzung von ‚a' durch Prädikate gebildet, deren Anwendbarkeit invariant unter der Beziehung der Längengleichheit ist. Zum anderen ergibt sich aus (4) ein weitere Anwendungsmöglichkeit von Aussagen der Form ‚Q_i ist ein Q'. Durch die Äußerung einer solchen Aussage kann darauf hingewiesen werden, welche Fragen durch Prädikationen beantwortet werden, die durch ‚Q_i' gebildet sind. Sollte jemand etwa auf die Frage nach der Länge von a durch die Äußerung von ‚a ist 1 Meter lang' reagieren, so kann die in diesem Fall zu zitierende Regel, dass das Prädikat ‚Rot' keine eine Antwort auf die Längenfrage, sondern auf die Farbfrage liefert, durch die Aussage ‚Rot ist eine Farbe und kein Länge' ausgedrückt werden.

5.2 Wie die Untersuchung entsprechender Frage- und Aussagekontexte im Abschnitt zuvor ergab, stehen abstrakte Sortale nicht für bestimmte Gegenstandsarten, sondern für Vergleichsbeziehungen zwischen Gegenständen. In diesem Anschnitt soll nun zunächst der hierdurch bestimmte Unterschied in der Verwendung konkreter und abstrakter Sortale weiter präzisiert werden. Anschließend soll auf die Konsequenzen eingegangen, welche sich hieraus für die Verwendung der Ausdrücke ‚gleich' und ‚identisch' ergeben.

In den Abschnitten 1.5-1.7 wurde erläutert, dass es die demonstrativen Aussagen – also die Aussagen, deren Wahrheitswerte von der Beschaffenheit der unmittelbar gegebenen Wirklichkeit abhängen – sind, welche die Wirklichkeit im unmittelbaren Sinn darstellen. Alle anderen synthetischen Aussagen stellen die Wirklichkeit insofern mittelbar dar, als ihre Wahrheitswerte in systematischer Weise von den Wahrheitswerten demonstrativer Aussagen (an anderen Raumzeitstellen) abhängen. Um zu bestimmen, in welcher Weise sich abstrakte Sortale auf die Wirklichkeit beziehen, müssen aus diesem Grund die demonstrativen Kontexte untersucht werden, in denen sie (sinnvoll) verwendet werden können.

Sei nun ‚Q' ein abstraktes Sortal, das – wie etwa ‚Farbe' oder ‚Länge' – eine bestimmte Vergleichsbeziehung ausdrückt. In diesem Fall sind also diejenigen Situationskontexte sinnvoll, welche aus der grundlegenden Aussagenform ‚Das Q von x_1 ist identisch mit dem Q von x_2' dadurch resultieren, dass x_1 und x_2 durch demonstrative singuläre Terme ersetzt werden. So bedeutet ‚Das Q dieses F ist identisch mit dem Q jenes G' dasselbe wie ‚Dieses F ist q zu jenem G' und ist also genau dann wahr, wenn die beiden Gegenstände, auf welche sich ‚Dieses F' und ‚jenes G' (gegebenenfalls) beziehen in der durch ‚Q' bestimmten Relation stehen.

Da ‚Q' ein Substantiv ist, ist nun der einfache demonstrative Kontext ‚Dies ist ein Q' zwar schulgrammatisch *wohlgeformt*. Er ist jedoch deshalb *sinnlos*, weil ‚Q' (so weit) nur als

Ausdruck einer Äquivalenzrelation zwischen *zwei* Gegenständen erklärt ist. Anders als ‚Dies ist ein Hund' ist also etwa ‚Dies ist eine Farbe' sinnlos (vgl. Quine 1973, S. 70-75).[1] Aus demselben Grund sind daher ebenfalls demonstrative Identitätskontexte wie ‚Dieses Q ist identisch mit dem Q von a' sinnlos. So ist etwa ein Ausdruck der Form ‚Diese Farbe ist identisch mit der Farbe von a' sinnlos; es sei denn natürlich, dieser wird im Sinn von ‚Die Farbe dieses Gegenstands ist identisch mit der Farbe von a' interpretiert, also im Sinn einer Farbgleichheitsaussage über *a* und den konkreten Gegenstand, auf den bei der Äußerung der Aussage gezeigt wird.

Das bedeutet, dass der Wirklichkeitsbezug abstrakter Sortale *relational* und nicht *kategorisch* zu konzipieren ist. Diejenigen demonstrativen Aussagen, in denen abstrakte Sortale nicht redundant vorkommen, sind Aussagen über die Verhältnisse *zweier* gegebener konkreter Gegenstände. Und eine kategorische demonstrative Verwendung abstrakter Sortale auf *einzelne* Gegenstände gibt es nicht. Ausdrücke wie ‚Länge' oder ‚Farbe' werden nicht auf nicht einzelne Gegenstände, sondern auf Paare von Gegenständen angewendet. Aus diesem Grund kann man sagen, dass ein abstraktes Sortal ‚Q', semantisch betrachtet, kein Sortal ist; d.h.: es ist kein Ausdruck für eine bestimmte Gegenstandsart. Und ebenso ist eine abstrakte Kennzeichnung der Art ‚Das Q von a' keine Kennzeichnung, d.h. kein Ausdruck, dessen Funktion in der Bezugnahme auf einen Gegenstand (der Art Q) besteht.

Gegen diese semantische Trennung abstrakter und konkreter Sortale kann – und wird – auf die Weise argumentiert, dass auf andere, also nicht-demonstrative Aussagekontexte verwiesen wird, in die sowohl konkrete als auch abstrakte Sortale sinnvoll eingesetzt werden können. Dass diese Möglichkeit nicht impliziert, dass konkrete und abstrakte Sortale in einheitlicher Weise verwendet werden, soll nun durch semantische Analysen dieser Kontexte – also durch Reflektion auf die Verifikation entsprechender Aussagen – gezeigt werden.

Den ersten Kontext dieser Art bilden die Aussagen der Form ‚Q_i ist ein Q'; also etwa Aussagen wie ‚Rot ist eine Farbe' oder ‚1 Meter ist eine Länge'. Diese Aussagen könnte man ihrer schulgrammatischen Form wegen als *abstrakte Prädikationen* bezeichnen. Und aufgrund der formalen Ähnlichkeit zu konkreten Prädikationen wie etwa ‚Hanjo Glock ist ein Philosoph' könnte man zwar anzunehmen versucht sein, ‚Farbe' und ‚Länge' hätten hierin die Funktion, diejenigen Gegenstände zu klassifizieren, auf welche sich die jeweiligen Subjektausdrücke – also ‚Rot' und ‚1 Meter' – beziehen. Aber natürlich werden die abstrakten Prädikationen ‚Rot ist eine Farbe' und ‚1 Meter ist eine Längev nicht in der Weise verifiziert, dass zunächst diejenigen Gegenstände ausfindig gemacht (identifiziert) werden, auf die ‚Rot' oder ‚1 Meter' sich beziehen, um dann festzustellen, ob auf diese Gegenstände die Ausdrücke ‚Farbe' bzw. ‚Länge' zutreffen.

[1] Hierbei ist ‚Dies ist eine Farbe' nicht zu verwechseln mit ‚Dies hat eine Farbe'.
[2] Vgl. Hale/Wright 2005, S. 172.
[3] Die folgenden Darstellungen orientieren im Wesentlichen an Wright (1983) und an Hale/Wright (2005).
[4] Diese Darstellung sowie die folgenden Darstellungen der Semantik abstrakter Aussagen finden sich in dieser Form

Die Verifikation – wenn man in diesem Fall von einer solchen reden will – gestaltet sich vielmehr so, dass festgestellt wird, ob die Verwendung von ‚Rot' und ‚1 Meter' – also die Anwendung dieser Ausdrücke auf konkrete Gegenstände – durch die Vergleichsrelationen der Farbgleichheit bzw. der Längengleichheit bestimmt ist. Eine abstrakte Prädikation ‚Q_i ist ein Q' behauptet nicht, dass der vermeintliche Bezugsgegenstand von ‚Q_i' von der durch ‚Q' bestimmten Art sei. Sie behauptet vielmehr, dass der Ausdruck ‚Q_i' in der durch ‚Q' bestimmten Weise verwendet wird. Abstrakte Prädikationen klassifizieren nicht Gegenstände gemäß ihrer Gegenstandsart, sondern Ausdrücke gemäß ihrer Verwendungsweise. Und wie im Abschnitt zuvor erläutert, besteht der *Zweck* solcher semantischer Kategorisierungen darin, zwischen sinnvollen und sinnlosen Ausdrücken zu unterscheiden, oder auch darin, Aussagen danach zu klassifizieren, welche Fragen sie beantworten.

Den zweiten Kontext, in dem sowohl konkrete als auch abstrakte Sortale verwendet werden können, bilden die *Identitätsaussagen*. Wenn man im Sinn der Bereichsneutralitätsannahme aus Abschnitt 1.8 annimmt, dass der Ausdruck ‚ist identisch mit' in *jedem* Kontext dasselbe bedeutet, dann könnte man meinen, dass auch konkrete und abstrakte Sortale dieselbe semantische Funktion haben müssen. Dass diese Annahme schon grundsätzlich problematisch ist, wurde in Abschnitt 1.8 bereits gezeigt. Ob der Ausdruck ‚ist identisch mit' in den beiden an dieser Stelle zu untersuchenden Kontexten jeweils dasselbe bedeutet, kann nur durch einen Vergleich der Verwendung (also der Verifikation) konkreter und abstrakter Identitäten ermittelt werden. Um die formale Analogie zwischen Aussagen dieser beiden Arten so weit wie möglich zu treiben, werden abstrakte Identitäten wie ‚Die Länge von a ist identisch mit der Länge von b' verschiedentlich mit konkreten Identitäten wie ‚Der Vater von a ist identisch mit dem Vater von b' verglichen (vgl. Wittgenstein PG, S. 351; Hale/Wright 2005, S. 174). Hierbei ist allerdings zu bemerken, dass *Vaterschaft* eine Relation und der Ausdruck ‚Vater' darum kein Sortal ist. Das bei der fraglichen Aussage unausdrücklich zugrundeliegende Sortal ist ‚Mann'. Deshalb sollte man sich eigentlich an der Formulierung ‚Der Mann, der Vater von a ist, ist identisch mit dem Mann, der Vater von b ist' orientieren. Aber wie dem auch sei: die Aussage ‚Der Vater von a ist identisch mit dem Vater von b' ist jedenfalls genau dann wahr, wenn es einen Gegenstand derart gibt, dass beim Zeigen auf diesen Gegenstand die folgenden beiden demonstrativen Aussagen wahr sind:

Dieser Mann ist der Vater von a.
Dieser Mann ist der Vater von b.

Die Verifikation von ‚Der Vater von a ist identisch mit dem Vater von b‘ besteht demnach in dem Versuch, eine *dritte* Person (neben a und b) ausfindig zu machen, welche sowohl zu a als auch zu b in der Vaterschaftsrelation steht. Es müsste also festgestellt werden, ob der Mann, der a gezeugt hat, auch b gezeugt hat. Das zeigt, dass ‚ist identisch mit‘ in ‚Der Vater von a ist identisch mit dem Vater von b‘ für die raumzeitliche Identität steht, wobei das konkrete Sortal ‚Mann' die Methode der Suche (in Raum und Zeit) bestimmt.

Es sei nun der Einfachheit halber angenommen, die Beziehung der Längengleichheit sei im Sinn der Möglichkeitserklärung aus Abschnitt 4.1 – d.h. also nicht durch Bezug auf Paradigmen, sondern allein durch den unmittelbaren Längenvergleich – erklärt. In diesem Fall ist die Aussage ‚Die Länge von a ist identisch mit der Länge von b‘ wahr, wenn a und b, aneinandergelegt, einander wechselseitig decken. Und dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn an dem Ort, an dem a und b aneinandergelegt werden die folgenden drei Aussagen wahr sind:

Dieses S ist identisch mit a.
Jenes S ist identisch mit b.
Die Länge dieses S ist identisch mit der Länge jenes S.

Die Aussage ‚Die Länge von a ist identisch mit der Länge von b‘ wird in diesem Fall also in der Weise verifiziert, dass a und b ausfindig gemacht und, indem sie aneinandergelegt werden, ihrer Länge nach miteinander verglichen werden. Nun ist klar: in ‚Die Länge von a ist identisch mit der Länge von b‘ hat ‚ist identisch mit‘ dieselbe Bedeutung wie in der dritten Wahrheitsbedingung: Die Länge dieses S ist identisch mit der Länge jenes S. Und in dieser Aussage steht ‚ist identisch mit' offenbar nicht für die raumzeitliche Identität. Denn ob ‚Die Länge dieses S ist identisch mit der Länge jenes S‘ wahr ist, wird nicht in der Weise festgestellt, dass irgendwelche Gegenstände ausfindig gemacht werden, auf die sich die Ausdrücke ‚Die Länge von diesem S‘ und ‚die Länge von jenem S‘ beziehen, sondern eben dadurch, dass die beiden Gegenstände, auf welche sich ‚Dieses S‘ und ‚Jenes S‘ beziehen, ihrer Länge nach miteinander verglichen werden. Im Gegensatz zum konkreten Sortal ‚Mann‘ bestimmt das abstrakte Sortal ‚Länge‘ also nicht eine Methode, um nach Gegenständen einer bestimmten Art zu *suchen*, sondern eine Methode, Gegenstände miteinander zu *vergleichen*.

Es bietet sich an, die soeben dargestellten Analysen durch ein paar weitere Bemerkungen zur Verwendung der Ausdrücke ‚gleich‘ und ‚identisch‘ zu ergänzen. Wenn gesagt wird, dass bestimmte Relationsausdrücke wie etwa ‚ist parallel zu‘ oder ‚ist kongruent zu‘ – im Gegensatz etwa zu ‚ist orthogonal zu‘ – Gleichheitsbeziehungen ausdrücken, so wird damit auf eine *logische*

Gemeinsamkeit der fraglichen Ausdrücke verwiesen, nämlich auf deren Symmetrie und Transitivität. Und es sind diese logischen Merkmale, welche es erlauben, die entsprechenden Äquivalenzrelationen auch durch Adjektive auszudrücken, in denen der Ausdruck ‚gleich' als Suffix (oder Präfix) erscheint. Es ist jedoch zu bemerken, dass der Ausdruck ‚gleich' etwa in ‚richtungsgleich' oder in ‚deckungsgleich' nicht zusätzlich noch auf eine *semantische* Gemeinsamkeit dieser relationalen Ausdrücke verweist. Denn durch ‚gleich' wird nicht ein spezifischer Verifikationsschritt bestimmt, der zwar Parallelitäts- und Kongruenzaussagen gemein wäre, Orthogonalitätsaussagen jedoch abginge. D.h.: das Feststellen, ob zwei Gegenstände in einer bestimmten Äquivalenzrelation zueinander stehen, kann nicht in zwei Untersuchungsschritte zerlegt werden, von denen der Eine der spezifischen Relationsart und der Andere dem Ausdruck ‚gleich' entspricht. Deshalb muss man sagen, dass der Ausdruck ‚gleich' insofern keine eigenständige Bedeutung *in* den entsprechenden Relationstermen hat, als er keinen Beitrag zu den Zutreffensbedingungen dieser Terme leistet. Andererseits könnte man sagen, dass der Ausdruck ‚gleich' dennoch eine Bedeutung habe. Denn dass er in einem bestimmten Relationsterm vorkommt, zeigt an, dass dieser Term (im Gegensatz zu anderen Termen) eine bestimmte Logik hat. Genauer: es zeigt an, dass die Zutreffensbedingungen dieses Terms – zu denen der Teilausdruck ‚gleich', wie gesagt, keinen Beitrag leistet –, ihn als Äquivalenzrelation und den Term damit als eine Art Ersetzungszeichen bestimmen.

In Bezug auf den Ausdruck ‚ist identisch mit' ist es zunächst ebenso richtig, wie wichtig, festzuhalten, dass dessen Verwendung insofern sortalrelativ ist, als die Verwendung dieses Ausdrucks erst durch das Hinzufügen *eines* (konkreten oder abstrakten) Sortals eindeutig bestimmt ist. Deshalb sollten sich Analyse eventuell eher an der Formulierung ‚ist dasselbe F wie' orientieren. Wenn nun ‚F' ein konkretes Sortal ist, dann steht ‚ist dasselbe F wie' für die raumzeitliche Identität. Und diese ist wiederum durch die Bedingung des *kontinuierlichen* Zutreffens des Sortals ‚F' definiert. So ist es für die Wahrheit von ‚a ist dasselbe F wie b' nicht hinreichend, dass ‚F' an den durch ‚a' und ‚b' bestimmten Raumzeitstellen zutrifft; also an den Raumzeitstellen, an denen ‚Dies ist a' und ‚Dies ist b' wahr sind. Vielmehr müssen darüber hinaus die Raumzeitstellen, an denen ‚Dies ist a' und ‚Dies ist b' auf demselben durch das kontinuierliche Zutreffen von ‚F' bestimmten Raumzeitpfad liegen. Die raumzeitliche Identität ist also zwar insofern sortalrelativ, als erst ein Sortal einen solchen Raumzeitpfad bzw. eine entsprechende Regel des Nachverfolgens (in Raum und Zeit) bestimmt. Dennoch trägt der Ausdruck ‚dasselbe' (bzw. ‚identisch') zu den Wahrheitsbedingungen durch ihn gebildeter Aussagen jeweils die entsprechende Kontinuitätsbedingung bei. Das bedeutet, dass ‚ist identisch mit' also den Verifikationsschritt des Nachverfolgens kodifiziert. Darum ist die Sortalrelativität der Identität konkreter (also raumzeitlicher) Gegenstände so zu verstehen, dass der Ausdruck ‚ist identisch mit' in diesem Fall zwar *ergänzungsbedürftig* ist. Dennoch leistet dieser Ausdruck einen echten Beitrag zu den Wahrheitsbedingungen durch ihn gebildeter Aussagen.

Anders im Fall eines abstrakten Sortals! Wie zuvor erläutert, können Äquivalenzrelationen nicht nur adjektivisch, sondern auch substantivisch formuliert werden. Und bei einem Übergang dieser Art – also etwa beim Übergang von ‚ist richtungsgleich zu' zu ‚hat dieselbe Richtung wie' – wird dann das Suffix (bzw. Präfix) ‚gleich' vom Wortstamm abgelöst und durch den Ausdruck ‚dasselbe' (oder auch ‚identisch') ersetzt. Wenn also ‚identisch' in Verbindung mit einem abstrakten Sortal verwendet wird, dann steht ‚identisch' nicht, wie im konkreten Fall, für raumzeitliche Identität bzw. Kontinuität. Vielmehr hat dieser Ausdruck in Verbindung mit einem abstrakten Sortal dieselbe metasprachliche Funktion wie der Ausdruck ‚gleich' in der entsprechenden adjektivischen Formulierung: er zeigt an, dass der gesamte Ausdruck ‚Das Q von x_1 ist identisch mit dem Q von x_2' eine bestimmte Logik hat.

Aus diesem Grund kann der Umstand, dass z.B. ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' gleichbedeutend mit ‚a ist parallel zu b' ist, nicht, wie von Frege (in 1884, §64) vorgeschlagen, so aufgefasst werden, dass in der ersten der beiden Aussagen der von beiden Aussagen ausgedrückte *Inhalt* derart zerlegt wird, dass hierbei ‚identisch' seinen gewöhnlichen (und einheitlichen) Inhalt erhält. Denn ‚identisch' steht in diesem Fall wie gesagt nicht für raumzeitliche Kontinuität. Frege Konzeption der „Inhaltszerlegung", an der sich auch Wright orientiert[2], ist abzulehnen, weil ‚identisch' in Bezug auf abstrakte Sortale eben nur dieselbe *Logik*, nicht jedoch dieselbe *Semantik* wie in Bezug auf konkrete Sortale hat. Daher kann man bestenfalls sagen, dass es sich beim Übergang von ‚a ist richtungsgleich mit b' zu ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' um eine Zerspaltung des *Ausdrucks* handle, wobei jedoch, wie zuvor erläutert, der abgespaltete und durch ‚identisch' ersetzte Ausdruck ‚gleich' eben keinen echten Inhalt hat.

5.3 In verschiedenen Büchern und Aufsätzen entwickelt Wright eine an Überlegungen Freges anknüpfende Konzeption abstrakter Sortale.[3] Diese Konzeption ist der soeben dargestellten Auffassung abstrakter Sortale nicht nur *inhaltlich*, sondern auch *methodologisch* entgegengesetzt. Die vorangegangen Analysen folgten jeweils dem methodologischen Grundsatz, dass die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Beitrag zur Verifikation und damit zur Verwendung durch ihn gebildeter Aussagen besteht. Diese Orientierung semantischer Analysen an der Verifikation und damit, wenn man so will, an der Epistemologie von Aussagen, hat das folgende Analyseprinzip

[2] Vgl. Hale/Wright 2005, S. 172.
[3] Die folgenden Darstellungen orientieren im Wesentlichen an Wright (1983) und an Hale/Wright (2005).

zur Folge, welches in Anlehnung an Wrights Terminologie auch als das Prinzip der *Epistemologiepriorität* bezeichnen werden kann:

(EP) Dass zwei Ausdrücke gleiche oder analoge semantische Funktion haben, bedeutet, dass sie gleiche bzw. analoge Verifikationsschritte bestimmen.

Die Befolgung dieses Prinzips hat sich in dieser Arbeit bislang in zwei zusammenhängenden Weisen geäußert. Zum einen wurden allgemeine semantische Kategorien jeweils durch bestimmte Verifikationscharakteristika bestimmt. So wurden unter anderem Namen, Prädikate und Wahrheitsfunktionen in den Abschnitten 1.4 und 1.5 aufgrund analoger Beiträge zu den Verifikationsregeln durch sie gebildeter Aussagen zusammengefasst bzw. voneinander getrennt. Zum anderen wurde die semantische Funktion einzelner Ausdrücke jeweils dadurch charakterisiert, dass auf den Verifikationsschritt (bzw. auf die Verifikationsschritte) reflektiert wurde, welchen der Ausdruck bestimmt.

Wright unterstellt nun Frege zu Recht ein Analyseprinzip, welches er, Wright, als das Prinzip der *Syntaxpriorität* bezeichnet. Dieses Prinzip lässt sich in etwa wie folgt formulieren:

(SP) Wenn zwei Ausdrücke gleiche bzw. analoge Syntax haben, dann haben sie auch gleiche bzw. analoge semantische Funktion.

Nach (SP) müssten also zum einen *semantische Kategorien* (bzw. Unterscheidungen) jeweils bestimmten syntaktischen Kategorien entsprechen. Und zum anderen müsste die Charakterisierung der semantischen Funktion eines bestimmten Ausdrucks aus seiner Syntax abgeleitet werden. Etwas plakativ könnte man also sagen: während (EP) verlangt, Ausdrücke nach ihrer Verwendung zu klassifizieren, verlangt (SP), sie nach ihrer Form zu klassifizieren (vgl. Wittgenstein PB, §154; Z, §462). Das Syntaxprioritätsprinzip entspricht somit dem in Abschnitt 1.8 diskutierten Prinzip, dem zu Folge die Wahrheitsbedingungen von Aussagen mit analoger Syntax in analoger Weise zu formulieren sind.

Geleitet von (SP) analysieren Frege und Wright – in leicht unterschiedlicher Weise – die Semantik abstrakter Sortale, insbesondere des Zahlbegriffs. Dabei verfolgen sie sowohl ein mathematisches als auch ein philosophisches Ziel (vgl. Hale/Wright 2005, S. 169/170). Das *mathematische* Ziel, welches im Folgenden keine weitere Rolle spielen soll, besteht im Beweis der logizistischen These, dass die Grundgesetze der Arithmetik allein aus Definitionen und bestimmten grundlegenden logischen Prinzipien ableitbar sind. Das *philosophische* Ziel besteht im Beweis des Platonismus bzw. in der Entwicklung und Verteidigung einer bestimmten Form des

Platonismus. Das heißt genauer: Aus der Semantik – und damit letztlich aus der Syntax – der (substantivisch formulierten) Zahlaussagen sollen im Wesentlichen drei Thesen abgeleitet werden: Eine *metaphysisch* interpretierte These, wonach Zahlen abstrakte Gegenstände sind; die *ontologische* These, dass Zahlen existieren; und schließlich die *epistemologische* These, dass wir Zugang zu Zahlen haben und also deren Existenz und Beschaffenheit erkennen können.

Es ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, dass sich dieser Platonismus nicht auf arithmetische Aussagen, sondern zunächst nur auf *Zahlaussagen* – also Anzahl- und Zahlengleichheitsaussagen – bezieht. Aus diesem Grund steht die entsprechende These, wonach Zahlaussagen von abstrakten Gegenständen handeln, noch nicht unmittelbar im Widerspruch zu der im Rahmen dieser Arbeit zu verteidigen Autonomiethese, welche nur behauptet, dass *arithmetische Aussagen* keine Wirklichkeit beschreiben. Wie sich in den Abschnitte 8.4 und 8.5 zeigen wird, können jedoch die Einwände, die hier in Abschnitt 5.5 und 5.6 gegen den sich auf Zahlaussagen beziehenden Platonismus erhoben werden, zum Teil auch auf den auf arithmetische Aussagen bezogenen Platonismus übertragen werden.

Sowohl Frege als auch Wright weisen ausdrücklich darauf hin, dass sich ihre Analysen des Zahlbegriffs auf abstrakte Sortale im Allgemeinen übertragen. Aus diesem Grund seien im Folgenden ihre Analysen und die daraus abgeleiteten Thesen in der entsprechenden allgemeinen Form diskutiert. Dabei werden sich die weiteren Untersuchungen im Wesentlichen an Wrights Texten orientieren.

Ausgangspunkt bilden sowohl bei Frege als auch bei Wright die Äquivalenzen zwischen adjektivisch und substantivisch formulierten Zahlengleichheitsaussagen. Dabei gehen beide davon aus, dass sich die Bedeutung der adjektivisch formulierten Aussagen durch Humes Prinzip erklären lassen. Beide weisen zu Recht darauf hin, dass analoge Äquivalenzen – also Äquivalenzen zwischen adjektivisch und substantivisch formulierten Aussagen – auch in anderen Fällen gelten. Wright bezeichnet solche Äquivalenzen, welche also dem Schema (AP) aus Abschnitt 1 entsprechen, als *Abstraktionsprinzipien* und stellt sie allgemein wie folgt dar:[4]

(AP) $Q(a)=Q(b) \Leftrightarrow a$ ist q zu b

Wright ergänzt nun (AP) um analoge Bestimmungen für abstrakte Prädikationen und Existenzaussagen. Hierfür definiert Wright zunächst, dass eine Äquivalenzrelation ‚q' genau dann *kongruent* zu einem Prädikat ‚F_i' ist, wenn ‚$F_i(b)$' von ‚$F_i(a) \wedge q(a,b)$' impliziert wird.[5] Falls ‚F_i' in

[4] Diese Darstellung sowie die folgenden Darstellungen der Semantik abstrakter Aussagen finden sich in dieser Form in (1983, S. 29 ff.).

[5] Diese Definition von ‚kongruent' steht im Einklang mit dem Gebrauch dieses Ausdrucks innerhalb der mathematischen Logik (vgl. etwa Rautenberg 2008, S. 41).

diesem Sinn kongruent zu ‚q' ist, so kann ‚F_i' ein wie folgt erklärtes abstraktes Prädikat ‚ϕ_i' zugeordnet werden:

$$(AP_1)\ \phi_i(Q(a)) \Leftrightarrow F_i(a))$$

Diese Äquivalenz wäre also so zu lesen: ‚Das Q von a ist ϕ_i' ist genau dann wahr, wenn ‚a ist F_i' wahr ist. Da das zweistellige Geradenprädikat ‚orthogonal' kongruent zu ‚parallel' ist, könnte man nach (AP_1) also anstelle einer Aussagen der Form ‚a ist orthogonal zu b' stets auch die Formulierung ‚Die Richtung von a ist orthogonal zu der Richtung von b' gebrauchen.

Auf der Grundlage von (AP_1) lassen sich dann ferner Existenzaussagen, welche durch diese abstrakten Prädikate gebildet sind, in der folgenden Weise erklären:

$$(AP_2)\ \exists q(\phi_i(q)) \Leftrightarrow \exists x(F_i(x))$$

Diese Äquivalenz ist ihrerseits so zu lesen: ‚Es gibt ein Q, das ϕ_i ist' ist genau dann wahr, wenn ‚Es gibt ein S, das F_i ist' wahr ist.

Das in Freges Schriften unausdrücklich und in Wrights Arbeiten ausdrücklich angenommene Syntaxprioritätsprinzip (SP) verlangt, dass (vermeintlich) semantische Begriffe – in diesem Fall die Begriffe des Sortals und des singulären Terms – durch syntaktische Kriterien definiert werden. In (1884, §57) nimmt Frege eine von syntaktischen Überlegungen geleitete semantische Analyse von Zahlengleichheitsaussagen vor, aufgrund derer es berechtigt erscheint, ihm die folgenden beiden Definitionen zu unterstellen:[6] zum einen sind Eigennamen und Substantive (bzw. Nominalphrasen), denen der bestimmte Artikel vorangestellt ist, singuläre Terme (oder ‚Namen', wie Frege sagt). Substantive (bzw. Nominalphrasen), denen der unbestimmte Artikel vorangestellt werden kann, sind Sortale. Es ist klar, dass abstrakte Sortale wie ‚Zahl' oder ‚Richtung' in diesem syntaktischen Sinn Sortale und abstrakte Kennzeichnungen der Form ‚die Anzahl der F' oder ‚die Richtung von a' in diesem Sinn singuläre Terme sind.

Im Unterschied zu Frege bestimmt Wright die Begriffe des Sortals und des singulären Terms durch Kriterien, die nicht eigentlich syntaktischer, sondern vielmehr *logischer* Art sind. – Die Frage inwiefern dieser Schritt mit dem von Wright ausdrücklich befürworteten Prinzip der Syntaxpriorität vereinbar ist, sei an dieser Stelle offen gelassen. – So schlägt er zunächst die folgenden Definition des Begriffs des Sortals vor (1983, S. 3; S. 105):

[6] Vgl. hierzu auch Wright (1983, S. 10 ff.).

‚Q' ist ein *Sortal* ⇔ Alle ‚F' sind kongruent zu ‚ist dasselbe Q wie'.

Eine Schwierigkeit, auf die im nächsten Abschnitt zurückzukommen sein wird, betrifft die Frage, ob Wright hierbei nicht eher ‚hat dasselbe Q wie' (bzw. ‚ist q zu') statt ‚ist dasselbe Q' im Sinn hat. Wright erörtert dann zwar ebenfalls verschiedene Möglichkeit, den Begriff des singulären Terms zu definieren. Da ihn jedoch keine diese Möglichkeiten zufriedenstellt, verzichtet er letztlich auf eine Definition (1983, S. 64). Nichtsdestotrotz scheint er an der Idee festzuhalten, dass eine adäquate Unterscheidung zwischen singulären Termen und Prädikaten zur Folge haben muss, dass sich singuläre Terme und Prädikate in einem Merkmal unterscheiden, welches er zuvor als (partielle) Definition dieser Unterscheidung erwägt. Hiernach müssen für singuläre Terme und Prädikate die beiden folgenden asymmetrischen Bedingungen gelten:[7]

(P) Sei ‚F' ein Prädikat. Dann gibt es ein Prädikat ‚G' derart, dass für jeden singulären Term ‚s' gilt:

‚s ist F' ist wahr ⇔ ‚s ist G' ist falsch.

(S) Sei ‚s' ein singulärer Term. Dann gibt es keinen singulären Term ‚s′' derart, dass für jedes Prädikat ‚F' gilt:

‚s ist F' ist wahr ⇔ ‚s′ ist F' ist falsch.

Die von Wright begründungslos für wahr erklärte Annahme, dass abstrakte Sortale und Kennzeichnungen, sofern sie entsprechend (AP), (AP_1) und (AP_2) verwendet werden, in seinem Sinn Sortale bzw. singuläre Terme sind, wird im nächsten Abschnitt noch näher zu prüfen sein.

Nach dem Syntaxprioritätsprinzip entsprechen syntaktischen Merkmalen bestimmte semantische Merkmale. Wright bringt nun dadurch die (logisch-syntaktisch erklärten) Begriffe des Sortals und des singulären Terms mit semantischen Charakterisierungen in Verbindung, indem er sagt, die semantische Funktion eines Sortals bestehe darin, Gegenstände (Elemente der Wirklichkeit) entsprechend ihrer Art zu klassifizieren (1983, S. 2). Und ferner bestehe die Funktion eines singulären Terms darin, sich auf einen bestimmten Gegenstand zu beziehen (Hale/Wright 2005, S. 171). Dass abstrakte Sortale Klassifikations- und abstrakte Kennzeichnungen Bezugsfunktion haben, leitet Wright also jeweils aus zwei Prämissen ab; nämlich daraus, dass die fraglichen Ausdrücke eine bestimmte Logik (bzw. Syntax) haben; und

[7] Vgl. (1984 S. 11; S. 55). Genau genommen, geht aus Wright Darstellung nicht eindeutig hervor, ob er die hier als (S) formulierte Bedingung oder die schwächere Bedingung im Sinn hat, wonach es für singuläre Terme im Allgemeinen charakteristisch sei, dass es singuläre Terme gibt, welche der Bedingung (S) genügen. Die Erläuterungen auf S. 12 in (1983) scheinen jedoch darauf hinzudeuten, dass Wright (S) meint.

daraus, dass Ausdrücke, welche eine solche Logik haben, eine bestimmte semantische Funktion haben. Für die Diskussion diese Argumentation im nächsten Abschnitt seien die fraglichen Argumente an dieser Stelle noch einmal explizit dargestellt:

P_1 ‚Q(a)' ist ein singulärer Term.
P_2 Ein Term hat genau dann, die Funktion, sich auf einen Gegenstand zu beziehen, wenn er singulär ist.
K_1 ‚Q(a)' hat die Funktion, sich auf einen Gegenstand zu beziehen.

P'_1 ‚Q' ist ein Sortal.
P'_2 Ein Term hat genau dann die Funktion, Gegenstände ihrer Art nach zu klassifizieren, wenn er ein Sortal ist.
K'_1 ‚Q' hat die Funktion, Gegenstände ihrer Art nach zu klassifizieren.

Sowohl Frege als auch Wright sind nun der Ansicht, dass die Bedeutungserklärung eines abstrakten Sortals ‚Q' auch die beiden folgenden Aussagekontexte erfassen muss: Zum einen *gemischte* Identitätskontexte der Form ‚s = Q(b)'. D.h. also Identitätskontexte, welche aus einem *konkreten singulären Term* und einer *abstrakten Kennzeichnung* gebildet sind. So muss nach Frege eine Erklärung des abstrakten Sortals ‚Richtung' den Sinn des Ausdrucks ‚England ist identisch mit der Richtung der Erdachse' bestimmen (vgl. 1884, §66). Zum anderen muss die Erklärung eines abstrakten Sortals den Sinn gemischter und ungemischter Prädikationen bestimmen; d.h. also Aussagekontexte der Form ‚s ist ein Q' und ‚Q_i ist ein Q', wobei ‚s' für einen *konkreten* singulären Term steht. In diesem Sinn muss nach Frege eine adäquate Definition des abstrakten Sortals ‚Zahl' nicht nur den Sinn einer Aussage wie ‚3 ist eine Zahl', sondern auch den Sinn eines Ausdrucks wie ‚Julius Caesar ist eine Zahl' bestimmen.

Die Annahme, dass diese gemischten Kontexte – also die aus abstrakten und konkreten Termen gebildeten Kontexte – sinnvoll sind, kann als Konsequenz des Syntaxprioritätsprinzips (SP) aufgefasst werden. Denn zunächst scheint (SP) die Möglichkeit von Scheinaussagen, also von Ausdrücken, die, obwohl sie die grammatische Form (Syntax) von Aussagen haben, sinnlos sind, grundsätzlich auszuschließen. Und ferner erscheint die Annahme natürlich, dass Ausdrücke, mit derselben semantischen Funktion in dieselben Kontexte sinnvoll eingesetzt werden können. Bei Frege findet sich nun ferner die scheinbar auch von Wright befürwortete Forderung, dass die Erklärung eines abstrakten Sortals den Sinn dieser gemischter Identitäten und Prädikationen derart bestimmen muss, dass diese falsch sind (vgl. 1884, §55, §66). Nun gilt: wenn zwei konkrete singuläre Terme ‚s' und ‚s′' auf zwei einander wechselseitig ausschließenden (konkreten) Sortalen basieren, so muss die entsprechende (konkrete) Identität ‚s=s′' falsch sein. In diesem Sinn kann etwa aus dem Umstand, dass die Sortale ‚Hund' und ‚Katze' einander ausschließen darauf geschlossen werden, dass jede Identität der Form ‚Der Hund von a ist identisch mit der Katze vom b' falsch ist. Aus diesem Grund kann die Adäquatheitsbedingung an die Erklärung eines abstrakten Sortals ‚Q', wonach sie die Falschheit gemischter Identitäten und Prädikationen zur Folge haben müsse, in der folgenden Weise vereinfacht werden: ‚Q' ist derart zu erklären, dass ‚Q' und ein beliebiges konkretes Sortal einander wechselseitig ausschließen.

Wright ist nun der Ansicht, dass das Abstraktionsprinzip (AP) bereits Erklärungen der gemischten Kontexte enthalte, insofern (AP) die für diese Erklärungen erforderlichen Zutreffensbedingungen von ‚Q' – und damit die Bezugsbedingungen von ‚Q(a)' – bereits *implizit* bestimme (1983, S. 116/117). Denn nach Wright lässt sich aus (AP) das folgende Prinzip ableiten:

> Ein (konkretes oder abstraktes) Sortal ‚G' kann nur dann auf Gegenstände zutreffen, auf welche auch ‚Q' zutrifft, wenn gilt: es gibt auf ‚G' basierende singuläre Terme ‚a' und ‚b' derart, dass die Wahrheitsbedingungen von ‚a=b' durch Bezug auf q erklärt werden können.[8]

Auf der Grundlage dieses Prinzip können nun, wie es scheint, die Zutreffensbedingungen von ‚Q' wie folgt explizit gemacht werden:

> (ZBQ) ‚Q' trifft auf einen Gegenstand x zu ⇔ Die Identitätskriterien von x beziehen sich auf q.

Zwar findet sich diese Formulierung nicht bei Wright. Dennoch scheint es Wrights Idee zu sein, dass abstrakte Sortale wie ‚Richtung' oder Zahl' auf genau diejenigen Gegenstände zutreffen, deren Identität durch Bezug auf Parallelität bzw. die Existenz von 1-1 Relationen erklärt werden kann. Und wenn die Zutreffensbedingungen abstrakter Sortale in diesem Sinn durch die Wahrheitsbedingungen entsprechender Identitäten bestimmt sind, so scheint es ausgeschlossen, dass ein konkretes und ein abstraktes Sortal auf ein und denselben Gegenstand zutreffen können. Denn die Identitätskriterien konkreter Gegenstände beziehen sich auf deren Position in Raum und Zeit.

[8] Wrights Formulierung auf S. 116/117 in (1983) bezieht sich ausschließlich auf den Zahlbegriff. Sie kann jedoch, wie es scheint, in der hier dargestellten Weise verallgemeinert werden.

Die Idee der Erklärungen der Zutreffensbedingungen abstrakter Sortale durch Bezug auf die entsprechenden Identitätskriterien wird von Frege zwar zunächst ins Auge gefasst, dann jedoch verworfen (1884, §65/66). Stattdessen schlägt er vor, dass zunächst die Bezugsregeln abstrakter Kennzeichnungen explizit durch die folgende Bestimmung erklärt werden (vgl. 1884, §68, §72): ‚Q(a)' bezieht sich auf die *Menge* derjenigen Gegenstände, die q zu a sind. Auf dieser Grundlage können dann die Zutreffensbedingungen des entsprechenden abstrakten Sortals ‚Q' in der folgenden Weise erklärt werden: ‚Q' trifft genau dann auf einen Gegenstand x zu, wenn es einen Gegenstand a derart gibt, dass ‚ist identisch mit dem Q von a' auf x zutrifft. Wie auch Wright zu Recht bemerkt, werden jedoch durch Freges Bestimmungen die gemischten Kontexte nicht erklärt (vgl. 1983, S. 112). Denn auch der Ausdruck ‚Menge' ist ein abstraktes Sortal, für das es nach (SP) zu bestimmen gelte, ob es auf konkrete Gegenstände – also etwa auf Julius Caesar – zutrifft oder nicht. Aus diesem Grund werden sich alle weitere Untersuchungen auf Wrights Erklärungen der gemischten Kontexte beziehen.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts bereits erwähnt, versucht Wright auf der Grundlage seiner semantischen (bzw. syntaktischen) Analyse abstrakter Sortale und Kennzeichnungen bestimmte metaphysische, ontologische und epistemologische Thesen zu begründen. Wrights Hauptziel ist dabei die Entwicklung einer *platonistischen* Philosophie der Arithmetik auf der Grundlage einer syntaktischen Analyse des Zahlbegriffs. Aber im Prinzip lassen sich seine philosophischen Thesen ebenso wie die ihnen zu Grunde liegenden semantischen Thesen auch auf andere abstrakte Sortale (und Kennzeichnungen) übertragen. Zunächst seien an dieser Stelle jedoch die speziell auf das abstrakte Sortal ‚Zahl' sowie die entsprechenden Zahlkennzeichnungen bezogenen semantischen Thesen dargestellt, welche sich aus der syntaktischen Analyse von (AP) ergeben:

(S_1) Die semantische Funktion des abstrakten Sortals ‚Zahl' besteht darin, Gegenstände ihrer Art nach zu klassifizieren; also danach, ob sie Zahlen sind oder nicht.

(S_2) Die semantische Funktion einer Zahlkennzeichnung der Art ‚Die Anzahl von F' besteht darin, sich auf einen Gegenstand – genauer: eine Zahl – zu beziehen.

Unter Rückgriff auf diese beiden semantischen Thesen sowie auf einige weitere Prämissen, die unmittelbar dargestellt werden sollen, begründet Wright, die folgenden drei Thesen:

(M) Zahlen sind abstrakte Gegenstände

(O) Zahlen existieren.

(E) Wir haben epistemischen Zugang zu Zahlen.

Wright formuliert zwar keine Begründung für die metaphysische These (M). Es scheint jedoch, dass sich eine solche Begründung wie folgt aus seinen semantischen Annahmen entwickelt lässt. Zunächst legt es die auf dem Syntaxprioritätsprinzip basierende semantische Analyse des Abstraktionsprinzips (AP) nahe, die Rede vom Besitz bestimmter Identitätskriterien *metaphysisch* und nicht etwa *semantisch* aufzufassen. Einerseits können die den verschiedenen Sortalen entsprechenden verschiedenen Identitätskriterien nicht die Semantik von ‚ist identisch mit' bestimmen, da dieser Ausdruck nicht mehrdeutig sein soll. Und wenn ferner die semantische Funktion abstrakter Kennzeichnungen ganz allgemein in der Bezugnahme auf bestimmte Gegenstände besteht, dann können die unterschiedlichen Bedingungen dafür, dass z.B. zwei Richtungs- und zwei Zahlkennzeichnungen sich auf denselben Gegenstand beziehen, nur als Eigenschaften der fraglichen Gegenstände verstanden werden.

Das aus Wrights Darstellungen abgeleitete Prinzip (ZBQ) legt ferner nahe, dass sich Gegenstände im Allgemeinen durch Bezug auf ihre jeweiligen Identitätskriterien in metaphysische Gegenstandsarten unterteilen lassen. Richtungen sind Gegenstände, deren Identität von der Parallelität bestimmter Geraden abhängt; Zahlen sind Gegenstände, deren Identität von der Existenz bestimmter 1-1 Relation abhängt; und überhaupt sind zwei Gegenstände genau dann von derselben (metaphysischen) Art, wenn ihre Identitätskriterien von derselben Art sind.

Auch die Unterscheidung zwischen konkreten und abstrakten Gegenständen, welche vielfach durch das Merkmal der Lokalisierbarkeit (in Raum und Zeit) bestimmt wird (vgl. Künne 1983, Kap. 2; Burgess/Rosen 1997, S. 20), könnte in der folgenden Weise durch Bezug auf Identitätskriterien definiert werden:

P_3 Ein Gegenstand ist genau dann konkret, wenn sich seine Identitätskriterien auf seine Position (Lokalisierung) in Raum und Zeit beziehen.

Auf der Grundlage dieser Bestimmung ließe sich dann ganz allgemein sagen, dass ein abstraktes Sortal nur auf Gegenstände zutreffen kann, die abstrakt – also nicht lokalisierbar – sind, und dass eine abstrakte Kennzeichnung sich (gegebenenfalls) auf einen Gegenstand bezieht, der abstrakt ist. Insbesondere sind dann Zahlen – also die Gegenstände, auf welche das abstrakte Sortal ‚Zahl' gegebenenfalls zutrifft – abstrakt.

Die ontologische These (O), wonach Zahlen – oder allgemeiner: abstrakte Gegenstände – existieren, versucht Wright nach dem sogenannten „Singulären Term Argument" zu beweisen (vgl. Hale/Wright 2005, S. 171). – Eine solche Argumentationsstrategie wird auch von anderen Platonisten wie etwa von Künne verfolgt (vgl. Künne 1983, S. 137 und S. 326). – Die erste typischerweise nicht ausdrücklich formulierte Prämisse dieses Arguments ist dabei die, dass durch abstrakte Sortale gebildete Existenzkontexte – wie etwa ‚Es gibt Zahlen' oder ‚Es gibt Richtungen' – sinnvoll sind. Diese Voraussetzung könnte im Prinzip durch das Syntaxprioritätsprinzip (SP) begründet werden, insofern, wie zuvor erläutert, (SP) die Möglichkeit von Scheinaussagen grundsätzlich auszuschließen scheint. Die zweite Prämisse lautet, dass Existenzaussagen von entsprechenden Identitäten bzw. Prädikationen impliziert werden. Die Annahme, dass diese beiden Regeln der Existenzgeneralisierung ganz allgemein gültig sind, besagt also, dass z.B. ‚Es gibt Richtungen' von ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' impliziert wird, und dass ‚Es gibt Farben' aus ‚Rot ist eine Farbe' folgt. Dass diese Schlussregeln gültig – und abstrakte Sortale und Kennzeichnungen in diesem Sinn ontologisch verpflichtend – sind, wird dabei von Wright weder begründet, noch erläutert. Die dritte und letzte Prämisse lautet dann, dass bestimmte durch abstrakte Sortale (bzw. Kennzeichnungen) gebildete Identitäten oder Prädikationen wahr sind. Die Prämissen der Argumentation für (O) können somit also wie folgt zusammengefasst werden:

> P_4 Existenzkontexte, die im grammatischen Sinn wohlgeformt sind, sind sinnvoll.
> P_5 Auf Identitäten und Prädikationen bezogene Existenzgeneralisierungen sind allgemein gültig.
> P_6 Es gibt durch abstrakte Sortale gebildete Identitäten bzw. Prädikationen, die wahr sind.

Traditionell erschien für den Platonismus die Frage problematisch, wie man epistemischen Zugang zu abstrakten Gegenstände haben kann, wenn diese nicht in Raum und Zeit ausfindig gemacht und wahrgenommen werden können. Die Grundlage für Wrights Beantwortung dieser Frage bildet eine wie folgt formulierbare Verallgemeinerung der Rede vom epistemischen Zugang zu Gegenständen (vgl. 1983, S. 87):

> P_7 Man hat genau dann epistemischen Zugang zu Gegenständen einer bestimmten Art, wenn man Aussagen über Gegenstände der fraglichen Art verifizieren kann.

Wenn nun die Rede vom epistemischen Zugang in dieser Weise verstanden wird, dann gilt zunächst, dass wir epistemischen Zugang zu konkreten Gegenständen haben, da wir Aussagen über diese Gegenstände verifizieren können. Und der Zugang zu konkreten Gegenständen – also die Verifikation entsprechender Aussagen – gestaltet sich dann in der Tat vielfach in der Weise, welche von der an den Platonisten gerichteten Frage vorausgesetzt wird, nämlich dadurch, dass diese Gegenstände ausfindig gemacht und wahrgenommen werden.

Andererseits scheint klar, dass wir auch Aussagen über abstrakte Gegenstände verifizieren können. Denn die allgemeinen Prinzipien (AP), (AP_1) und (AP_2) zeigen ja wie. So kann eine abstrakte Identitätsaussage ‚Q(a)=Q(b)' in der in der Weise werden verifiziert, dass zunächst die entsprechende (konkrete) Aussage ‚q(a,b)' verifiziert wird, um dann aus dem Ergebnis dieser Verifikation entweder ‚Q(a)=Q(b)' oder ‚¬Q(a)=Q(b)' gemäß (AP) abzuleiten. Wenn also die Rede vom epistemischen Zugang zu abstrakten Gegenständen im Sinn von P_7 verstanden wird, haben wir also Zugang zu abstrakten Gegenständen wie etwa Richtungen oder Zahlen, da entsprechende Identitätsaussagen durch das feststellen der Parallelität von Geraden bzw. das Bestehen bestimmter 1-1 Relationen verifiziert werden (vgl. Hale/Wright 2005, S. 172).

5.4 Nach Wright ist ein Term ‚Q' nur dann ein Sortal, wenn ‚ist dasselbe Q wie' nicht nur eine Äquivalenzrelation ausdrückt, sondern darüber hinaus „echte" Identitätsaussagen generiert. Wie in Abschnitt 5.3 erläutert, bedeutet dies nach Wright, dass ‚ist dasselbe Q wie' eine universelle Kongruenz ist. Wrights Formulierungen dieses Echtheitskriteriums in (1983, S. 3) lassen nun zwei verschiedene Interpretationen zu:

(1) ‚hat dasselbe Q wie' ist kongruent zu allen ‚F_i'.

(2) ‚ist dasselbe Q wie' ist kongruent zu allen ‚ϕ_i'.

Angenommen zunächst, es sei die letztere dieser beiden Deutungen gemeint. Wenn man Wrights durch das Prinzip (AP_1) gegebene Erklärung abstrakter Prädikationen zu Grunde legt, dann ist die Kongruenz der ‚ϕ_i' zu ‚ist dasselbe Q wie' eine unmittelbare Folge der hierbei vorausgesetzten Kongruenz der entsprechenden ‚F_i' zu ‚ist q zu'. Dass ‚ist dasselbe Q wie' eine universelle Kongruenz ist, ist damit keine echte – d.h.: prüfbare – These, sondern eine von (AP_1) implizierte Stipulation: die abstrakten Prädikate ‚ϕ_i' sind deshalb kongruent zu ‚ist dasselbe Q wie', weil überhaupt nur die Bildung *solcher* Prädikate erlaubt wird. Wrights nicht weiter begründete Behauptung, dass z.B. ‚ist dieselbe Länge wie' nur eine Kongruenz zu einer sehr eingeschränkten Klasse von Prädikaten sei, ist daher abwegig und wohl auf eine Verwechslung von ‚ist dieselbe Länge wie' mit ‚hat dieselbe Länge wie' zurückzuführen (vgl. 1983, S. 3).

Angenommen nun, Wright meine, dass ‚hat dasselbe Q wie' (bzw. ‚ist q zu') kongruent zu allen ‚F_i' sein solle. Diese Bedingung ist nun so stark, dass sie, wie es scheint, in keinem Fall erfüllt ist. So gilt etwa auch im paradigmatischen Fall der Richtungsidentität, dass ‚hat dieselbe

Richtung wie' (z.B.) keine Kongruenz für Farbprädikate ist. Denn daraus, dass zwei Geraden parallel sind, folgt natürlich nicht, dass sie auch dieselbe Farbe haben. Es scheint somit, dass Wrights vermeintliches Echtheitskriterium für (abstrakte) Sortale nur als *Forderung* für die Definition abstrakter Prädikate ‚ϕ_i' zu verstehen ist. Dabei lautet diese Forderung, dass abstrakte Prädikate ‚ϕ_i' – eben um kongruent zu ‚ist dasselbe Q wie' zu sein (!) – nur auf der Grundlage von Prädikaten ‚F_i' zu erklären sind, welche ihrerseits kongruent zu ‚hat dasselbe Q wie' sind. Wird diese Forderung unterstellt, so generiert ‚ist dasselbe Q wie' – sofern es sich hierbei nur um eine Äquivalenzrelation handelt – allerdings *immer* echte Identitätsaussagen.

Nun zu Wrights Verwendung des Begriffs des singulären Terms! Nach Wright kann ein Term ‚a' nur dann singulär sein, wenn er keinen (singulären) Gegenterm ‚b' derart besitzt, dass für jedes Prädikat ‚F' gilt: ‚F(a)' ist genau dann wahr, wenn ‚F(b)' falsch ist. Diese Bedingung – d.h. die Existenz eines solchen Gegenterms – sei dagegen für Prädikate charakteristisch, da diese negierbar seien (vgl. 1983, S 12). Obwohl Wright diese Charakterisierung von Prädikaten für unbestreitbar erklärt (1983, S. 55), muss sie leider bestritten werden. Denn wenn die Möglichkeit eines leeren singulären Terms ‚a' zugelassen wird, dann ist sowohl ‚F(a)' als auch ‚$\neg$F(a)' falsch. Bei der Zulassung dieser Möglichkeit können ‚F' und ‚$\neg$F' nicht dadurch charakterisiert werden, dass zwei durch sie gebildete Prädikationen *verschiedene Wahrheitswerte* haben, sondern nur dadurch, dass zwei durch sie gebildete Prädikationen *nicht beide wahr* sein können. Diese Bedingung entspräche dann eher Künnes Auffassung der Unterscheidung singulärer und genereller Terme (Prädikate) in (Künne 1983, S. 29).[9]

Für beide Bestimmungen ergibt sich (zumindest) eine Schwierigkeit. Nach dem Syntaxprioritätsprinzip müssen alle schulgrammatisch wohlgeformten Kontexte erklärt werden. Wie in Abschnitt 5.3 erläutert wurde, meint Wright, dass die gemischten Identitäten der Art ‚a=Q(b)' bereits nach dem Abstraktionsprinzip (AP) implizit im Sinn von (ZBQ) erklärt seien. Unklar ist allerdings, in welcher Weise gemischte Prädikationen, d.h. also Prädikationen der Form ‚F_i(Q(a))' und ‚ϕ_i(a)' zu verstehen sind. So ist, wie es scheint, so weit nicht bestimmt, wann z.B. Geradenprädikate auf Richtungen zutreffen, und wann Richtungsprädikate auf Geraden zutreffen. Angenommen nun, diese gemischten Prädikationen seien durch die folgenden Definitionen erklärt:

$$F_i(Q(a)) :\Leftrightarrow \neg F_i(a)$$

$$\phi_i(a) :\Leftrightarrow \neg\, \phi_i(Q(a))$$

[9] Für eine ausführliche Kritik von Künnes Definitionen siehe Büttner (2011).

In diesem Fall ist ‚Q(a)' sowohl in Wrights als auch in Künnes Sinn Gegenterm von ‚a', und umgekehrt. D.h.: wenn ‚a' und ‚Q(a)' durch dasselbe Prädikat ergänzt werden, können nicht beide hieraus resultierenden Prädikationen wahr sein. Und wenn zusätzlich unterstellt wird, dass sowohl der Bezugsgegenstand von ‚a' als auch der von ‚Q(a)' existiert, dann haben die beiden entsprechenden Prädikationen tatsächlich entgegen gesetzte Wahrheitswerte. Somit wären nach Wright weder ‚a', noch ‚Q(a)' singulär!

Gegen diese Definitionen könnte man einwenden wollen, dass alle (elementaren) gemischten Prädikationen – ebenso wie die gemischten Identitäten – falsch sein müssen. Dementsprechend müsste man also entweder stipulieren oder annehmen, dass Folgendes gilt:

‚F_i(Q(a))' ist falsch für alle ‚Q(a)'

‚ϕ_i(a)' ist falsch für alle ‚a'.

Doch auch in diesem Fall gilt, dass bei Anwendung ein und desselben Prädikats auf ‚a' und ‚Q(a)' mindestens eine der hieraus resultierenden Prädikationen falsch ist.

Aus den bisherigen Überlegungen dieses Abschnitt kann somit das folgende Fazit gezogen werden: so, wie die Begriffe des Sortals und des singulären Terms von Wright erläutert werden, sind die beiden grundlegenden syntaktischen Thesen P_1 und P_1', wonach abstrakte Sortale (echte) Sortale und abstrakte Kennzeichnungen singuläre Terme sind, falsch. Da die Möglichkeit, die fraglichen Begriffe derart durch syntaktische bzw. logische Kriterien zu definieren, dass P_1 und P_1' wahr sind, nicht ausgeschlossen werden kann, sei im weiteren Verlauf der Untersuchungen jedoch angenommen, dass P_1 und P_1' wahr sind. Diese Untersuchungen sollen nun die Geltung von P_2 sowie P_2' und damit letztlich auch die Geltung des Syntaxprioritätsprinzips (SP) betreffen.

Nach P_2' (bzw. K_1') besteht die semantische Funktion eines abstrakten Sortals in der Klassifikation von Gegenständen (entsprechend ihrer Art). Und ferner besteht die semantische Funktion einer abstrakten Kennzeichnungen ‚Q(a)' nach P_2 (bzw. K_1) in der Bezugnahme auf einen bestimmten Gegenstand (der Art Q). Dennoch soll nach Wright die Bedeutung von ‚Q' sowie die Bedeutungen der ‚Q(a)' durch das Abstraktionsprinzip (AP) und nicht durch die (explizite) Angabe entsprechender Zutreffens- bzw. Bezugsbedingungen erklärt werden. Diese Art der Erklärung widerspricht nach Wright deshalb nicht den fraglichen semantischen Charakterisierungen, weil (AP) seiner Ansicht nach die fraglichen Zutreffens- und Bezugsbedingungen implizit bestimmt. Dass (AP) die fraglichen Bezugs- und Zutreffensbedingungen *implizit* bestimmt, kann jedoch nur dann behauptet werden, wenn *explizite*

Bestimmungen dieser Bedingungen dadurch *eindeutig* bestimmt sind, dass aus ihnen (AP) ableitbar ist. Wie die folgende Überlegung zeigt, ist dies jedoch nicht der Fall.

Wie bereits erläutert wurde, können die ‚Q' entsprechenden Prädikate ‚Q_i' durch geeignete Paradigmen erklärt werden, wobei jeweils verschiedene (konkrete) Gegenstände als Paradigmen gewählt werden können. So können Farbprädikate durch entsprechende Farbtäfelchen erklärt werden; und analog hierzu können Richtungsprädikate durch Bezug auf Geraden erklärt werden, die durch eine bestimmten Punkt verlaufen. – Im Fall der Anzahloperatoren könnten, wie im Kapitel zuvor erläutert, bestimmte Mengen konkreter Gegenstände die Rolle von Paradigmen übernehmen. – Angenommen nun, die Zutreffens- bzw. Bezugsbedingungen von ‚Q' bzw. den ‚Q(a)' seien in der folgenden Weise erklärt:

(ZBQ_1) ‚Q' trifft auf x zu ⇔ x ist ein q-Paradigma.

(BBQ_1) ‚Q(a)' bezieht sich auf x ⇔ Es gilt:
‚Q' trifft auf x zu (d.h. x ist ein q-Paradigma); und
x ist q zu a.

Das bedeutet also, dass sich ‚Q(a)' jeweils auf dasjenige Paradigma bezieht, das q zu a ist. So würde sich also etwa ‚die Farbe von a' auf das Farbtäfelchen beziehen, das farbgleich mit a ist, und ‚die Richtung von a' würde sich auf diejenige Gerade beziehen, welche parallel zu a ist und durch den festgelegten Punkt verläuft. Ferner würde ‚Q' auf genau diejenigen Gegenstände zutreffen, die q-Paradigmen sind. D.h.: ‚Farbe' trifft auf die Farbtäfelchen zu, ‚Richtung' auf die durch den festgesetzten Punkt verlaufenden Geraden.

Nun gilt bei *jeder* Erklärung dieser Art offenbar das Abstraktionsprinzip (AP), da sich hiernach ‚Q(a)' und ‚Q(b)' genau dann auf dasselbe q-Paradigma beziehen, wenn a q zu b ist. Und da hierbei *verschiedene* Wahlen von Paradigmen in Frage kommen, sind die Zutreffensbedingungen von ‚Q' und die Bezugsbedingungen der ‚Q(a)' nicht bereits durch Forderung der Geltung von (AP) eindeutig bestimmt. Es kann daher also keinesfalls gesagt werden, dass bereits (AP) *allein* diese Bedingungen bestimme.

Wie im Abschnitt zuvor erläutert wurde, gibt Wright selbst explizite Zutreffensbedingungen für ‚Q' an. So soll ‚Q' nach (ZBQ) nur auf Gegenstände zutreffen, deren Identitätskriterien sich auf q beziehen. Unter dieser Voraussetzung, so Wright, sei die Möglichkeit, dass ‚Q' auf konkrete Gegenstände zutrifft, ausgeschlossen. Hierzu ist nun zunächst zu bemerken, dass Erklärungen der zuvor geschilderten Art, wonach ‚Q' genau auf die entsprechenden q-Paradigmen zutrifft, mit Wrights Erklärung insofern vereinbar sind, als q auch ein Identitätskriterium von q-Paradigmen darstellt. Wrights Erklärung ist daher mehrdeutig und schließt insbesondere nicht die Möglichkeit der Wahrheit der gemischten Identitätskontexte aus. Denn nach (BBQ_1) wäre z.B. ‚Das Rottäfelchen ist identisch mit der Farbe des Rottäfelchens' wahr. Wright könnte hiergegen durch den Hinweis darauf protestieren, dass q nur ein sekundäres Identitätskriterium für q-Paradigmen ist, insofern deren Identität grundsätzlich durch deren Position in Raum und Zeit bestimmt ist. Doch sogar wenn man Wright diesen Punkt zugesteht, zeigt die davon unberührte Vereinbarkeit von (ZBQ_1) mit (AP), dass weder (spezifische) (ZBQ_1), noch Wrights (ZBQ) aus (AP) folgen, sondern dass es sich in jedem Fall um *zusätzliche* Erklärungen handelt. Und das bedeutet: ohne eine zusätzliche Erklärung dieser Art, sind die gemischten Identitätskontexte – wie in Abschnitt 5.2 behauptet – Scheinkontexte. Wrights Lösung des sogenannten Cäsarproblems zeigt also nicht, dass gemischte Identitäten bereits (implizit) durch das Abstraktionsprinzip (AP) erklärt, jedoch systematisch falsch sind. Vielmehr ist sein Vorschlag (ZBQ) nur als eine *Ergänzung* von (AP) zu verstehen, welche den Sinn gemischter Identitätskontexte in einer Weise erklären soll, welche diese systematisch als falsch bestimmt.

Aus dieser Überlegung lässt sich somit auch ein erster Einwand gegen das Syntaxprioritätsprinzip (SP) bzw. gegen das aus (SP) folgende Korollar entwickeln, wonach alle syntaktisch wohlgeformten Ausdrücke sinnvoll sind. Wenn, wie Wright es will, das Abstraktionsprinzip (AP) als Möglichkeit betrachtet wird, die Bedeutung von ‚Q' in adäquater Weise zu erklären, dann handelt es sich bei den gemischten Identitäten ‚a=Q(b)' um syntaktisch wohlgeformte Ausdrücke, die – obwohl ihre Teilausdrücke adäquat erklärt sind – dennoch sinnlos sind. Die Adäquatheit von (AP) als Erklärung von ‚Q' impliziert also, dass das Prinzip, wonach syntaktisch wohlgeformte Ausdrücke sinnvoll sind, bestenfalls als Forderung verstanden werden kann, alle syntaktische wohlgeformten Ausdrücke zu erklären.

Die weiteren Untersuchungen des Syntaxprioritätsprinzips seien nun durch die Erinnerung an die in Abschnitt 1.8 eingeführten Alphabetaussagen eingeleitet. Hiernach galt eine Aussage der Form ‚α folgt auf β' – wobei ‚α' und ‚β' für bestimmte Buchstaben des lateinischen Alphabets stehen – genau dann als wahr, wenn ‚α' im Alphabet unmittelbar auf ‚β' folgt. In Bezug auf diese Aussagen gilt nun Folgendes: Einerseits besteht die semantische Funktion der Buchstaben in Alphabetaussagen insofern nicht in der Bezugnahme auf Gegenstände, als weder die Existenz, noch die spezifische Beschaffenheit irgendwelcher Gegenstände eine Bedingung für die Wahrheit (oder Falschheit) dieser Aussagen ist. – Insbesondere sind die Buchstaben also nicht ontologisch verpflichtend. – Andererseits kann angenommen werden, dass die Buchstaben, allein nach syntaktischen oder logischen Kriterien betrachtet, als singuläre Terme klassifiziert werden würden, da sie in der Alphabetsprache des Identitätszeichen flankieren und dieselbe Position wie Quantoren einnehmen können (vgl. Abschnitt 1.8).

Wenn also mit der semantischen Kategorie eines Ausdrucks die Art seines Beitrags zu den Wahrheitsbedingungen und damit zu den Verifikationsregeln durch ihn gebildeter Aussagen gemeint ist, dann zeigt das Beispiel der Alphabetaussagen die Ungültigkeit des Syntaxprioritätsprinzips. Denn wie auch schon in Abschnitt 1.8 erläutert wurde, bestimmt weder die Syntax, noch die Logik eines Ausdrucks seine Semantik. Implikationsregeln sind zwar aus Verifikationsregeln bzw. aus Wahrheitsbedingungen ableitbar, jedoch nicht umgekehrt. Aus diesem Grund sind semantische Begriffe (oder Kategorien) durch Bezug auf Verifikationscharakteristika – und nicht durch Bezug auf formale oder logische Merkmale – zu definieren.

Das Beispiel der Alphabetaussagen stellt somit auch Wrights Prämisse P_2, wonach singuläre Terme die Funktion haben, sich auf Gegenstände zu beziehen, vor ein Dilemma. Angenommen, die Rede von der Bezugsfunktion eines Ausdrucks sei semantisch zu verstehen, so dass also die Existenz – und eventuell auch die spezifische Beschaffenheit – eines Bezugsgegenstands für die Wahrheit von Aussagen erforderlich ist, welche durch den fraglichen Ausdruck gebildet sind. In diesem Fall zeigt bereits das Beispiel der Alphabetaussagen die Irrigkeit von P_2, da die Buchstaben hierin zwar im logisch-syntaktischen Sinn singulär sind, jedoch keine Bezugsfunktion in dem soeben skizzierten Sinn haben.

An P_2 kann daher nur dann festgehalten werden, wenn P_2 als *Definition* der Rede von der Bezugsfunktion aufgefasst wird. Wright selbst legt diese Auffassung auch nahe, wenn er einerseits sagt, dass singuläre Terme eben einfach die Terme mit Bezugsfunktion sind, und dass, andererseits, singuläre Terme durch logisch-syntaktische Kriterien zu identifizieren sind (vgl. Hale/Wright 2005, S. 171). Wenn jedoch nicht nur der Begriff des singulären Terms, sondern – nach P_2 – auch die Rede von einer Bezugsfunktion *allein* durch Rückgriff auf logisch-syntaktische Kriterien definiert wird, dann wird dadurch, dass einem Ausdruck die Funktion der Bezugnahme zugeschrieben wird, eben auch nicht mehr gesagt, als dass der fragliche Ausdruck eine bestimmte Syntax bzw. Logik hat. Dass ein Ausdruck die Funktion hat, sich auf einen Gegenstand zu beziehen, bedeutet in diesem Fall also *nicht*, dass die Wahrheit einer durch den Ausdruck gebildeten Aussage die Existenz eines bestimmten Gegenstands voraussetzt, sondern *nur*, dass der Ausdruck zu bestimmten anderen Ausdrücken in spezifischen Substitutionsbeziehungen steht.

Die bisherigen Einwände gegen das Syntaxprioritätsprinzip (SP) und gegen P_2 beruhten wesentlich auf (EP) und damit also auf der epistemischen Konzeption des Bedeutungsbegriffs, wonach die Bedeutung eines Ausdrucks in seinem Beitrag zu den Verifikationsregeln durch ihn gebildeter Aussagen besteht. Nun könnte Wright zwar (EP) bestreiten. Doch auch er müsste wohl zugegeben, dass ein Begriff nur dann als semantisch – und nicht als syntaktisch oder logisch – bezeichnet werden kann, wenn er *paraphraseinvariant* ist; d.h. wenn er nicht auf einen Ausdruck zutreffen und auf einen anderen, gleichbedeutenden Ausdruck nicht zutreffen kann.

Nach Wright ist nun der Begriff der *ontologischen Verpflichtung* paraphraseinvariant und damit semantischer Art. Zwei Aussagen mit verschiedenen ontologischen Verpflichtungen können somit nicht gleichbedeutend – oder auch nur äquivalent – sein (vgl. Hale/Wright 2005, S. 174). Nun ist nach dem Abstraktionsprinzip eine Aussage der Form ‚Q(a)=Q(b)' äquivalent zu einer Aussage der Form ‚a ist q zu b'; also etwa ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' zu ‚a ist parallel zu b'. Wenn die ontologischen Verpflichtungen dieser beiden Aussagen nach (SP) – d.h. also allein basierend auf einer entsprechenden Syntaxanalyse – ermittelt werden, dann müssten diesen beiden Aussagen jedoch verschiedene ontologische Verpflichtungen zugeschrieben werden. Denn einerseits verpflichtet ‚a ist parallel zu b' nur auf die Existenz der beiden Geraden a und b; also der Bezugsgegenstände singulären Terme ‚a' und ‚b'. Dagegen enthält ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' darüber hinaus die beiden abstrakten Kennzeichnungen ‚Die Richtung von a' und ‚die Richtung von b', welche nach (SP) ebenfalls singuläre Terme sind und daher die Existenz eines weiteren Gegenstands (also genauer: einer Richtung) implizieren, auf den diese beiden Ausdrücke sich beziehen.

Das bedeutet: die drei von Wright gemachten Annahmen, das Syntaxprioritätsprinzip, das Abstraktionsprinzip sowie die Annahme, dass es sich bei den ontologischen Verpflichtungen einer Aussage um eines ihrer semantischen – also paraphraseinvarianten – Merkmale handelt, sind nicht miteinander vereinbar. Und wenn an den beiden nur schwerlich abzulehnenden Annahmen festgehalten werden soll, dass ontologische Verpflichtungen semantische Merkmale sind, und dass das Abstraktionsprinzip (AP) gilt, dann zeigt ironischerweise ausgerechnet (AP), dass das Prinzip der Syntaxpriorität zu verwerfen ist. Denn, wie zuvor erläutert, ergäbe eine rein syntaxbasierte Analyse der rechten und linken Seiten von (AP), dass diese jeweils verschiedene ontologischen Verpflichtungen hätten und daher nicht äquivalent sein können.

In jedem Fall zeigt das Abstraktionsprinzip also, dass die Frage nach den ontologischen Verpflichtungen einer Aussage nicht *allein* anhand ihrer Syntax entschieden werden kann. Sollen nun die logisch-syntaktischen Kriterien dennoch eine Rolle bei der Bestimmung ontologischer Verpflichtungen spielen, so müssten diese Kriterien in folgendem Sinn „semantisiert" werden: sie müssten durch weitere, nicht rein syntaktische Kriterien bzw. Bestimmungen derart ergänzt werden, dass die gemeinsame Anwendung syntaktischer und ergänzender Kriterien paraphraseinvariant ist.

Zur Erläuterung dieses Punktes seien nun drei grundlegende Möglichkeiten derartige Semantisierungen dargestellt. (i) Erstens könnten die syntaktischen Verpflichtungskriterien durch die *Universalisierung*sbestimmung ergänzt werden, dass eine Aussage auf die Existenz genau derjenigen Gegenstände verpflichtet, auf welche, allein nach syntaktischen Kriterien beurteilt, nicht nur die Aussage selbst, sondern auch *jede* ihrer Paraphrasen verpflichtet. Hiernach würde also ‚Q(a)=Q(b)' deshalb nicht auf die Existenz eines Q verpflichten, weil die Paraphrase ‚a ist q zu b' nach syntaktischen Kriterien beurteilt nicht hierauf verpflichtet. (ii) Zweitens könnten die syntaktischen Verpflichtungskriterien durch die *Existenzialisierung*sbedingung ergänzt werden, dass eine Aussage auf die Existenz genau derjenigen Gegenstände verpflichtet, auf welche, allein nach syntaktischen Kriterien beurteilt, sie selbst oder *mindestens eine* ihrer Paraphrasen verpflichtet. In diesem Fall würde also ‚a ist q zu b' auf die Existenz eines Q verpflichten, da nach syntaktischen Kriterien beurteilt die Paraphrase ‚Q(a)=Q(b)' hierauf verpflichtet. (iii) Drittens könnten die syntaktischen Verpflichtungskriterien auch in der Weise durch eine Regel zur Bestimmung *kanonischer* Paraphrasen ergänzt werden, dass eine Aussage auf die Existenz genau derjenigen Gegenstände verpflichtet, auf die, nach syntaktischen Kriterien beurteilt, ihre kanonische Paraphrase verpflichtet. Worauf ‚a ist q zu b' und ‚Q(a)=Q(b)' verpflichten hinge in diesem Fall also davon ab, ob, und wenn ja, welche dieser beiden Formulierungen als kanonisch bestimmt würde.

Klar ist allerdings auch, dass die Wahl einer bestimmten Semantisierungsmöglichkeit einer geeigneten Begründung bedürfte. Wie sich zu Ende dieses Abschnitts zeigen wird, kann Wrights Position dahingehend verstanden werden, dass er ‚Q(a)=Q(b)' als die für ontologische Fragen kanonische Formulierung betrachtet. Unter der Voraussetzung des Prinzips der Epistemologiepriorität würde sich, wie sogleich zu erläutern sein wird, eher die Wahl von ‚a ist q zu p' als kanonische Formulierung nahe legen.

Es ist nun zunächst zu bemerken, dass sich das Problem der Paraphrasevarianz nicht stellt, wenn das Prinzip der Epistemologiepriorität (EP) – anstelle des Prinzips der Syntaxpriorität (SP) – vorausgesetzt wird. Nach (EP) ist es die Verifikationsmethode einer Aussage, welche ihre Semantik bestimmt, so dass also die Methode zur Ermittlung semantischer Merkmale letztlich immer auf einer Analyse von Verifikationsregeln beruhen muss. Zunächst ergibt z.B. eine unabhängige Analyse der Verifikationsregeln von ‚a ist parallel zu b' und von ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b', dass beide Aussagen in derselben Weise verifiziert werden und daher dieselbe Bedeutung (d.h. dieselben Wahrheitsbedingungen) haben. Denn im einem wie im anderen Fall bestünde die Verifikation darin, die beiden Geraden, auf welche ‚a' und ‚b' sich (gegebenenfalls) beziehen, ausfindig zu machen und auf ihre Parallelität (bzw. Richtungsgleichheit) hin zu prüfen.

Dieser Schritt bestimmt nun bereits, dass auch die ontologischen Verpflichtungen beider Aussagen nach (EP) – und das bedeutet also: nach verifikationistischen Kriterien – beurteilt, identisch sein müssen. Genauer wäre aus der Verifikationsanalyse die Konsequenz zu ziehen, dass beide Aussagen nur auf die Existenz der Geraden a und b verpflichten, da im Rahmen der Verifikation beider Aussagen nur diese beiden Geraden – und nicht noch ein dritter Gegenstand – zu identifizieren ist. Und dieses Ergebnis ist natürlich verallgemeinerbar: wenn die Rede von ontologischen Verpflichtungen verifikationistisch interpretiert wird, dann verpflichten abstrakte Kennzeichnungen ‚Q(a)' *nur* auf die Existenz des konkreten Gegenstands, auf den ‚a' sich gegebenenfalls bezieht. Denn wie in Abschnitt 5.2 gesehen, steht ‚Q' nicht für eine Regel, welche konkreten Gegenstände andere, abstrakte Gegenstände zuordnet, sondern für eine Vergleichsbeziehung zwischen konkreten Gegenständen.

An dieser Stelle noch zwei letzte Bemerkungen zu den Semantisierungen der syntaktischen Kriterien ontologischer Verpflichtungen! Wenn man von der linken und rechten Seite von (AP) eine Seite als die kanonische Paraphrase bestimmen sollte, würde diese Wahl mit Blick auf die Analysen der Verifikationsregeln beider Seiten zwar wohl auf die rechten Seiten fallen. Denn die Notation ‚a ist q zu b' ist insofern *epistemisch transparenter* als die Notation ‚Q(a)=Q(b)', als Letztere die Idee nahelegen könnte, dass die Verifikation von ‚Q(a)=Q(b)' nicht nur die Identifikation von a und b, sondern auch eine Identifikation von Q(a) und Q(b) erfordere. Hierzu ist jedoch erstens zu bemerken, dass diese Wahl von ‚a ist q zu b' als kanonische Paraphrase dann also weder rein willkürlich, noch der Maxime geschuldet wäre, ontologische Verpflichtungen so gering wie möglich zu halten. Zweitens ist, wenn (EP) gefolgt wird, das Ergebnis, dass ‚Q(a)=Q(b)' nur auf die Existenz von a und b verpflichtet, unabhängig von der Verfügbarkeit irgendwelcher Paraphrasen. Das bedeutet: auch in einer Sprache, in der ‚a ist q zu b' überhaupt nicht verwendet wird und daher nicht als kanonische Paraphrase von ‚Q(a)=Q(b)' bestimmt werden könnte, ergäbe eine Analyse der Verifikation von ‚Q(a)=Q(b)', dass diese Aussage nur auf die Existenz von a und b verpflichtet.

Wright macht zwar selbst auf das Problem der Paraphrasevarianz aufmerksam. Seine Reaktion hierauf ist jedoch durchaus bemerkenswert. Klar ist natürlich, dass die Annahme, ‚Q(a)=Q(b)' würde nur die Existenz von a und b implizieren, nicht mit seinen metaphysischen und ontologischen Thesen vereinbar ist. Wright bemerkt nun zu Recht, dass man *für* diese Annahme nicht allein durch Verweis auf das Abstraktionsprinzip (AP) argumentieren könne, sondern dass hierfür ferner die zusätzliche Prämisse vorausgesetzt werden müsse, dass die rechten Seiten von (AP) ontologische Priorität haben.[10] Denn wenn man stattdessen die ontologische Priorität der linken Seiten voraussetzte, müsste man aus (AP) die Konsequenz ziehen, dass sowohl ‚a ist q zu b' als auch ‚Q(a)=Q(b)' die Existenz von Gegenständen der Art Q voraussetzen (vgl. 1983, S. 31 ff.; Hale/Wright 2005, S. 174). Aber anders als Wrights Formulierungen nahelegen, ist seine eigene Position im Hinblick auf diese Prioritätsfrage offenbar nicht neutral. Denn die Geltung seiner ontologischen These setzt, wie gesagt, voraus, dass es die linken Seiten von (AP) sind, die ontologische Priorität haben.[11] Und Wright liefert nicht nur kein Argument für die ontologische Priorität der linken Seiten. Er scheint auch zu übersehen, dass allein das Erfordernis einer solchen Prioritätsannahme, die Irrigkeit des Prinzips der Syntaxpriorität zeigt.

Anstelle eines ausdrücklichen Arguments für die ontologische Priorität der linken Seiten des Abstraktionsprinzips (AP), formuliert Wright in (1983) ein in Hale/Wright (2005) dann nicht mehr wiederholtes Argument dafür, dass, wie er sagt, die Syntax der linken Seiten bei der Bestimmung ihrer ontologischen Verpflichtungen „ernst genommen" werden müsse. Und damit ist natürlich gemeint, dass die Annahme, ‚Q(a)=Q(b)' würde auch auf die Existenz eines Q verpflichten, unvermeidbar sei. Aus dieser Annahme müsste dann – obwohl Wright dies, wie gesagt, nicht ausdrücklich erwähnt – im Prinzip auch auf die ontologische Priorität der linken Seiten von (AP) geschlossen werden.

Wrights argumentiert nun folgendermaßen (vgl. 1983, S. 68): Zunächst weist er zu Recht darauf hin, dass sowohl Aussagen der Form ‚Q(a)=Q(b)' als auch Aussagen der Form ‚a ist q zu b' in Gebrauch sein könnten, ohne dass Erstere analytisch durch Letztere erklärt sind (oder umgekehrt). In diesem Fall wäre also nur durch unabhängige Reflektionen darauf, was Aussagen beider Arten bedeuten, zu erkennen, dass Aussagen beider Arten äquivalent sind und dass das Abstraktionsprinzip (AP) somit gültig ist. Und nun meint Wright, dass eine solche, die Geltung von (AP) nicht bereits voraussetzende Reflektion auf die Bedeutung von Aussagen der Form ‚Q(a)=Q(b)' *deren* Syntax ernst nehmen müsse. Denn anderenfalls, so Wright, wäre unklar, wie man erkennen könnte, welche Wahrheitsbedingungen diese Aussagen haben und, a fortiori, dass sie dieselben Wahrheitsbedingungen wie Aussagen der Form ‚a ist q zu b' haben. D.h. also kurz gesagt: wenn das Abstraktionsprinzip nicht stipuliert, sondern durch Reflektion (bzw. Analyse) erkannt werden soll, dann muss die Syntax der Linken Seiten ernst genommen werden.

Dieses Argument, an dem eigentlich Wrights gesamte metaphysische und ontologische Konzeption hängt und auf das er in (1983) auch mehrfach Bezug nimmt, ist allerdings gleich in

[10] Dass eine der beiden Seiten ontologische Priorität hat, kann dabei wohl so verstanden werden, dass die fragliche Seite im zuvor geschilderten Sinn die für ontologische Fragen kanonische – und also entscheidende – Formulierung darstellt.

[11] Der Fairness halber muss erwähnt werden, dass Wright an späterer Stelle (S. 88 ff. von 1983) einem solchen Eingeständnis immerhin recht nahe kommt.

zweifacher Hinsicht irrig. Erstens gilt der schon mehrfach erläuterte Punkt, dass eine Analyse, welche die Syntax beider Seiten das Abstraktionsprinzips (AP) ernst nimmt, zu dem Ergebnis führen muss, dass (AP) ungültig ist. Denn wie auch von Wright korrekt erkannt, müsste eine syntaxbasierte Analyse zu dem Ergebnis kommen, dass Aussagen beider Art verschiedene ontologische Verpflichtungen haben. Es ist daher schon etwas kurios, dass sich Wright ausgerechnet auf (AP) stützt, um das vermeintliche Erfordernis zu begründen, die Syntax der linken – und dann ja wohl auch die der rechten – Seiten ernst zu nehmen. Denn eigentlich müsste er vielmehr begründen, warum (AP) gültig sein soll, obwohl das Ernstnehmen der Syntax beider Seiten zu einem anderen Ergebnis führen würde. Zweitens ist natürlich die Idee, dass semantische Analysen in Wrights Sinn die Syntax der zu analysierenden Aussagen ernst nehmen müssten, auch grundsätzlich anfechtbar. So wurde nun bereits an verschiedenen Stellen dieser Arbeit dafür argumentiert, dass semantische Analysen nicht an der Syntax, sondern an der Verifikation orientiert sein sollten. Und gerade (AP) scheint einen weiteren Grund *für* diese epistemologische Konzeption der Semantik zu liefern: denn es scheint, dass man jemanden, der über die Geltung von (AP) eben aufgrund der verschiedenen Syntax beider Seiten im Zweifel ist, dadurch überzeugen könnte, dass man ihn darauf hinweist, dass Aussagen beider Art in derselben Weise verifiziert werden.

5.5 Aussagen wurden in Abschnitt 1.1 als diejenigen Sätze definiert, in Bezug auf welche die Rede von einer Verifikation sinnvoll ist. Dementsprechend ist in Bezug auf jede Aussage auch die Frage danach sinnvoll, wie die Aussage verifiziert wird. Für den Fall von Aussagen der Form ‚Q(a)=Q(b)' wurde diese epistemologische Frage in den Abschnitten 5.1 und 5.2 bereits beantwortet. Hiernach kann die Verifikation von ‚Q(a)=Q(b)' bzw. von ‚a ist q zu b' wie folgt in zwei Schritte – einen *Identifikationsschritt* und einen *Vergleichsschritt* – zerlegt werden:

> (1) Es werden die Gegenstände identifiziert – d.h. ausfindig gemacht –, auf welche ‚a' und ‚b' sich beziehen.
> (2) Diese beiden Gegenstände werden in der durch ‚Q' bzw. ‚q' bestimmten Hinsicht miteinander – bzw. mit einem bestimmten Maßstab – verglichen.

Wenn man die Frage nach der Verifikation von Aussagen über die Identität von Längen oder Farben konkreter Gegenstände unvoreingenommen zu beantworten sucht, indem man also nur die Verifikation selbst und nicht schon die Form der fraglichen Aussagen betrachtet, dann kann man nur zu dem Ergebnis kommen, dass hierbei jeweils zwei konkrete Gegenstände ausfindig gemacht und entsprechend ihrer Farbe bzw. ihrer Länge miteinander vergleichen werden. Die abstrakten Sortale ‚Farbe' und ‚Länge' bestimmen hierbei die im zweiten Schritt anzuwendende Vergleichsmethode.

Wenn man mit Wright voraussetzt, dass Anzahlidentitäten der Form ‚Die Anzahl der F ist identisch mit der Zahl der G' Sinn von Humes Prinzip durch ein Zuordnen der unter die jeweiligen Begriffe fallenden Gegenstände verifiziert werden, dann kann die Verifikation wie folgt in zwei Schritte zerlegt werden:

> (1) Es werden die Gegenstände identifiziert – d.h. ausfindig gemacht –, auf welche ‚F' und ‚G' zutreffen.
>
> (2) Diese Gegenstände, auf die ‚F' zutrifft, werden den Gegenstände zugeordnet, auf die ‚G' zutrifft.

Das abstrakte Sortal ‚Anzahl' – welche hier etwa im Gegensatz zu dem abstrakten Sortal ‚Umfang' steht – bestimmt hierbei also den in (2) beschriebenen Verifikationsschritt des Zuordnens der F und G.

Die obige Verifikationsbeschreibung der Aussagen der Form ‚Q(a)=Q(b)' würde sich auch dann nahe legen, wenn man sich an der syntaktischen Form der rechten Seiten des Abstraktionsprinzips (AP) – also an den adjektivisch formulierten Aussagen ‚a ist q zu b' – orientierte. Aus diesem Grund wurden die adjektivisch formulierten Aussagen im Abschnitt zuvor als epistemisch transparent bezeichnet. Wenn man sich dagegen an der Syntax der rechten Seiten von (AP) orientiert, könnte man geneigt sein, deren Verifikation nach dem Vorbild der Verifikation von ‚Der Vater von a ist identisch mit dem Vater von b' zu beschreiben. Hierbei würde dann also auch der Vergleichsschritt als Identifikationsschritt beschrieben werden, so dass sich die folgende allgemeine Verifikationsbeschreibung ergäbe:

> (1) Es werden die Gegenstände identifiziert – d.h.: ausfindig gemacht –, auf welche ‚a' und ‚b' sich beziehen.
>
> (2′) Es werden die Gegenstände identifiziert, welche die Q der im ersten Schritt identifizierten Gegenstände sind.

Hierzu ist nun zunächst zu bemerken, dass (2) und (2′) unter den folgenden zwei Bedingungen problemlos als äquivalent betrachtet werden könnten. Zum einen müsste der Vergleich, von dem in (2) die Rede ist, eingeschränkt werden auf den Vergleich mit einem Maßstab, also mit einem Paradigmensystem wie etwa einem System von Farbmustern oder dem System von Geraden, welche durch einen bestimmten Punkt verlaufen. Zum anderen müssten die Gegenstände, von denen in (2′) die Rede ist, als die entsprechenden Paradigmen aufgefasst werden. Unter diesen beiden Bedingungen könnte, der Vergleich von a und b mit dem Q-Maßstab, als Identifikation derjenigen Paradigmen verstanden werden, welche q zu a bzw. b sind. Da Paradigmen konkrete Gegenstände sind, ist die Annahme dieser beiden Bedingungen allerdings ausgeschlossen, falls die ‚Q(a)' und ‚Q(b)' als Kennzeichnungen abstrakter Gegenstände konzipiert werden.

Diese Überlegung zeigt nun zwei Dinge. *Erstens* macht sie deutlich, dass sich für syntaxbasierte Untersuchungen und damit für die Anwendung von Syntaxprioritätsprinzips (SP) das Problem der Paraphrasevarianz nicht nur dann stellt, wenn es gilt, ontologische Verpflichtungen zu ermitteln, sondern auch dann, wenn es Verifikationsregeln zu ermitteln gilt. Denn da (2) und (2′) nicht – oder zumindest nicht ohne weiteres – als äquivalent gelten können, müsste man, (SP) folgend, annehmen, dass ‚Q(a)=Q(b)' und ‚a ist q zu b' in verschiedener Weise verifiziert werden und darum auch nicht dasselbe bedeuten können. Wenn ‚Identifizieren' im selben Sinn gemeint ist, dann zeigt auf die durch (SP) geleitete Ermittlung der Verifikationsregeln der linken und rechten Seiten des Abstraktionsprinzips (AP), dass (SP) und (AP) nicht miteinander vereinbar sind.

Zweitens zeigt diese Überlegung, wie die auf der Syntaxanalyse basierende Beschreibung des zweiten Verifikationsschritts (2′) die traditionellen epistemologischen Bedenken gegen den Platonismus motiviert. Denn dadurch, dass der zweite Verifikationsschritt in Analogie zum Ersten dargestellt wird, erscheint es unumgänglich, eine in Analogie zum Raum konzipierte, abstrakte Wirklichkeit jenseits von Raum und Zeit zu postulieren, in welcher die abstrakten Gegenstände angesiedelt sind und ausfindig gemacht werden können. Und wenn darunter, Zugang zu bestimmten Gegenständen zu haben, nicht nur im konkreten, sondern auch im abstrakten Fall die Möglichkeit verstanden wird, die fraglichen Gegenstände ausfindig zu machen und wahrzunehmen, dann sind die durch ihre Unlokalisierbarkeit definierten abstrakten Gegenstände notwendigerweise unzugänglich.

Die im Folgenden als *mythologisch* bezeichnete Lösung des Problems der Zugänglichkeit abstrakter Gegenstände besteht darin, eine spezifische Art der Wahrnehmung abstrakter Gegenstände zu *postulieren*.[12] Wie im Prinzip alle modernen Platonisten vermeidet auch Wright diese mythologische Antwort auf die Frage nach dem Zugang zu abstrakten Gegenständen. Wie bereits zu Ende von Abschnitt 5.3 angedeutet wurde, begegnet er der Zugangsfrage stattdessen in der Weise, dass er den rechten Seiten des Abstraktionsprinzips (AP) – d.h. also den adjektivischen Formulierungen ‚a ist q zu b' – „epistemische Priorität" zuspricht. Hiernach wird also sowohl ‚Q(a)=Q(b)' als ‚a ist q zu b' in der Weise verifiziert, welche durch die Syntax Letzterer suggeriert und zuvor durch (1) und (2) dargestellt wurde (vgl. 1983, S. 31, 89;

[12] Diese Konzeption soll später – in Abschnitt 8.4 – kritisiert werden.

Hale/Wright 2005, S. 172).[13] In der im Abschnitt zuvor entwickelten Terminologie könnte man also sagen, dass nach Wright ‚a ist q zu b' die in epistemologischer Hinsicht kanonische Formulierung darstellt.

Durch diese Bestimmung wird nun zwar das Problem der Paraphrasevarianz umgangen. Wright scheint jedoch wieder nicht zu bemerken, dass eine solche Prioritätsthese aus den zuvor geschilderten Gründen auch in diesem Fall unvereinbar mit dem Syntaxprioritätsprinzip (SP) ist. Die von Wright vorgeschlagene Lösung des Zugangsproblems ist überhaupt nur dann verfügbar, wenn (SP) und damit also dasjenige Prinzip aufgegeben wird, auf dem das ganze neologizistische Projekt basiert. Außerdem ist zu bemängeln, dass Wright die Uneinheitlichkeit seiner Bestimmungen – ontologische Priorität für die linken Seiten, Epistemologische für die Rechten – nicht begründet. Hierdurch scheint Wright sich die Polemik gefallen lassen zu müssen, Prioritäten allein danach zu verteilen, wie es ihm für seine philosophischen Thesen günstig erscheint.

Wenn nun, wie auch Wright anzunehmen scheint, die Verifikation abstrakter Identitäten in bestimmten Vergleichen konkreter Gegenstände besteht, dann sind zwar offenbar keine mythologischen Postulate erforderlich, um diese Verifikation verständlich zu machen. Andererseits ist dann in der Beschreibung der Verifikation abstrakter Identitäten – also insbesondere in Schritt (2) – von abstrakten Gegenständen und, a fortiori, von einem Identifizieren solcher Gegenstände keine Rede mehr. Der berechtigte Hinweis darauf, dass abstrakte Identitäten der Form ‚Q(a)=Q(b)' durch einen Vergleich der konkreten Bezugsgegenstände von ‚a' und ‚b' verifiziert werden, zeigt somit zwar, dass solche abstrakten Identitäten *verifizierbar* sind. Er zeigt jedoch nicht, dass abstrakte Gegenstände *zugänglich* sind, da das fragliche Verifikationsverhalten keinerlei Interaktion – keine ausfindig machen, wahrnehmen, oder dergleichen – mit solchen Gegenständen beinhaltet. Wenn die *allgemeinste* epistemologische Frage bezüglich abstrakter Identitäten, nämlich die Frage nach der Art ihrer Verifikation in dieser Weise durch den Verweis auf das Vergleichen konkreter Gegenstände beantwortet wird, dann muss die *speziellere* Frage danach, in welcher Weise abstrakte Gegenstände zugänglich sein sollen, zurückgewiesen werden. Denn diese Frage setzt bereits irrigerweise voraus, dass die Verifikation nicht im Vergleichen konkreter Gegenstände, sondern in einem Identifizieren abstrakter Gegenstände besteht.

Trotz dieses Umstands scheint Wright diese Darstellung der Verifikation abstrakter Identitäten nicht nur als Antwort auf die Frage nach der Verifikation von Aussagen über abstrakte Gegenstände aufzufassen, sondern auch als Antwort auf die Frage nach dem Zugang zu

[13] Es ist zu bemerken, dass die von Wright in (Hale/Wright, (2005) S. 172) gewählte Formulierung, wonach jeweils ‚Q(a)=Q(b)' nach (AP) aus ‚a ist q zu b' abgeleitet wird, zusätzlich voraussetzt, dass beide Formulierungen verfügbar und (AP) bekannt ist.

abstrakten Gegenständen. – Diese Auffassung wurde in Anschnitt 5.3 durch die Prämisse P_7 formuliert. – Es scheint jedoch nur dann möglich, das Vergleichen konkreter Gegenstände als das Identifizieren abstrakter Gegenstände zu verstehen, wenn die Rede vom Identifizieren abstrakter Gegenstände (bzw. vom Zugang zu solchen Gegenständen) in dieser Weise *definiert* wird. Es muss also eine Bestimmung der folgenden Art unterstellt werden:

> ‚Q(a) identifizieren' bedeutet: a mit einem anderen Gegenstand in Hinsicht q vergleichen.

Redeweisen dieser Art, wonach also z.B. Farben oder Längen als die Farben bzw. Längen bestimmter konkreter Gegenstände *identifiziert* werden, sind natürlich (zumindest in der Philosophie) durchaus verbreitet. Doch wenn die Rede vom Identifizieren abstrakter Gegenstände in dieser Weise erklärt bzw. verstanden wird, so sind hierzu zwei Dinge zu bemerken. Erstens hat der Ausdruck ‚identifizieren', wenn er durch eine abstrakte Kennzeichnung ergänzt wird, nicht denselben Sinn wie dann, wenn er durch einen singulären Term für einen konkreten Gegenstand ergänzt wird. Denn sei ‚a' ein solcher singulärer Term, dann lässt sich die Rede von Identifizieren von a in etwa wie folgt explizieren:

> ‚a identifizieren' bedeutet: a in Raum und Zeit ausfindig machen; d.h.: sich an den Ort begeben, an dem a sich befindet.

Zu sagen, dass sowohl konkrete als auch abstrakte Gegenstände identifiziert werden können, ist somit eine *Syllepse*. Denn wenn das Identifizieren abstrakter Gegenständen nicht darin besteht, diese ausfindig zu machen, sondern darin, konkrete Gegenstände miteinander zu vergleichen, dann *tut* man beim Identifizieren konkreter und abstrakter Gegenstände nicht jeweils dasselbe mit verschiedenen Gegenständen; sondern man tut Verschiedenes mit denselben Gegenständen. Zweitens ist diese Überlegung auch auf die verschiedenen „Arten abstrakter Gegenstände" zu übertragen. Wenn das Identifizieren von Farben in Farbvergleichen, das Identifizieren von Längen dagegen in Längenvergleichen besteht, dann besteht auch der Unterschied zwischen dem Identifizieren von Farben und dem Identifizieren von Längen in den Verhaltensweisen, für welche der Ausdruck ‚identifizieren' hierbei steht, und nicht (notwendigerweise) in den Gegenständen, auf welche sich das jeweilige Verhalten bezieht. Längen zu identifizieren, bedeutet also nicht, dasselbe mit Längen zu machen, wie das, was man mit Farben macht, wenn man diese identifiziert.

Wenn ein abstraktes Sortal in Verbindung mit dem Ausdruck ‚identifizieren' verwendet wird, dann besteht seine Funktion also darin, den Sinn dieses Ausdrucks zu indizieren und nicht darin, die Art des identifizierten Gegenstand zu charakterisieren. Und der Grund dafür, so unterschiedliche Verhaltensweisen wie Farbvergleiche, Längenvergleiche oder, nicht zu vergessen, auch das 1-1 Zuordnen von Gegenständen durch den Ausdruck ‚identifizieren' zu bezeichnen, besteht eben darin, dass die Aussagen, welche durch die Ausführung dieser Verhaltensweisen verifiziert werden, eine analoge Logik und deshalb (mitunter) einen analogen Ausdruck haben. D.h.: Weil sowohl die Ergebnisse von Farbvergleichen als auch die von Längenvergleichen in der Form ‚Q(a)=Q(b)' ausgedrückt werden können, bezeichnet man beide Vergleichsvorgänge als Identifikationen.

Hinsichtlich Wrights vermeintlicher Lösung des Problems der Zugänglichkeit abstrakter Gegenstände kann also das folgende Fazit gezogen. Zwar kann man Wright zugegeben, dass er die Art und Weise, in welcher die abstrakte Identitäten ‚Q(a)=Q(b)' verifiziert werden, korrekt darstellt. Es ist allerdings etwas irreführend, diese Darstellung nicht als Grund für die Zurückweisung der Zugangsfrage, sondern als deren Antwort zu präsentieren. Denn damit dasjenige Verhalten, welches hierdurch dargestellt wird – nämlich das Vergleichen konkreter Gegenstände –, als Lösung des Zugangsproblems betrachtet werden kann, bedarf es einer Erweiterung der Rede von einem Zugang zu Gegenständen und damit einer Veränderung des Problems. Den Verweis auf Vergleiche konkreter Gegenstände als Lösung für das Problem des Zugangs zu abstrakten Gegenständen darzustellen, hat insofern Ähnlichkeit damit, dass Problem der Dreiteilung eines Winkels durch das Aneinanderlegen dreier gleicher Winkel als gelöst zu betrachten (vgl. Wittgenstein BGM, II §2).

5.6 In diesem Abschnitt soll nun dafür argumentiert werden, dass es sich bei den vermeintlich *metaphysischen* Aussagen, wonach Farben, Längen und Zahlen abstrakte Gegenstände sind, um potentiell irreführend formulierte *semantische* Aussagen handelt.

Vorbereitend hierfür sei zunächst darauf hingewiesen, dass, was im Abschnitt zuvor über die Verwendung des Ausdrucks ‚identifizieren' gesagt wurde, für alle *Verhaltensbeschreibungen* zu gelten scheint, die sowohl durch konkrete als auch durch abstrakte Sortale ergänzt werden können. So ist es zwar durchaus sinnvoll, z.B. davon zu reden, auf Farben oder Längen zu *zeigen* oder diese zu *zählen*. Dennoch bezeichnen die Ausdrücke ‚zeigen' oder ‚zählen' in diesem Fall zum einen nicht dasselbe Verhalten wie dann, wenn sie durch konkrete Sortale ergänzt werden. Und zum anderen bezeichnen sie auch dann verschiedene Verhaltensweisen, wenn sie durch verschiedene Sortale ergänzt werden. Auf eine Farbe oder Länge zu zeigen, bedeutet: auf einen konkreten Gegenstand zeigen, der die Farbe bzw. Länge hat. Und dass jemand z.B. bei der hinweisenden Definition eines Wortes auf die Farbe (anstatt auf die Länge) desjenigen Gegenstands zeigt, auf den er hinweist, bedeutet, dass er die Anwendung des Wortes auf diejenigen Gegenstände lizenziert, welche farbgleich (und nicht etwa längengleich) mit dem Gegenstand sind, auf den er hinweist (vgl. Wittgenstein PG, §27).

Anders als beim Zählen konkreter Gegenstände der Art F wird beim Zählen der Farben oder der Längen der F ein gegebenes F nur dann gezählt, wenn zuvor noch kein anderes F gezählt wurde, welches farb- bzw. längengleich zu dem gegebenen F ist. Offensichtlich besteht also der Unterschied zwischen dem *Zählen der F* einerseits und dem *Zählen der Farben der F* andererseits, nicht darin, dass in beiden Fällen verschiedene Gegenstände (bzw. Gegenstände verschiedener Art) gezählt werden, sondern darin, dass dieselben Gegenstände in verschiedener Weise gezählt werden. Die durch das Hinzufügen des abstrakten Sortal ‚Farbe' bewirkte Veränderung besteht in einer Modifikation der Zähltechnik, welche durch die dem Sortal entsprechenden Vergleichsbeziehung bestimmt ist.

Wenn zuvor – in Abschnitt 5.2 – gesagt wurde, dass abstrakte Kennzeichnungen nicht die Funktion hätten, sich auf Gegenstände zu beziehen, dann war damit zunächst natürlich nur gemeint, dass sie nicht *dieselbe* Funktion wie singuläre Terme für konkrete Gegenstände haben. Dieser Punkt könnte also auch wie folgt ausgedrückt werden: wenn der Ausdruck ‚Bezug' ganz allgemein so verstanden werden soll, wie in der Rede davon, dass z.B. ‚Der erste Mensch auf dem Mond' sich auf eine Person bezieht, dann muss man sagen, dass die abstrakten Kennzeichnungen ‚Q(a)' keine Bezugsfunktion haben! Aber genau wie im zuvor diskutierten Fall der Verhaltensbeschreibungen, kann natürlich dadurch die Möglichkeit gegeben werden, die tatsächliche Funktion abstrakter Kennzeichnungen durch die Verwendung des Ausdrucks ‚Bezug' (oder ‚bezieht sich auf') zu beschreiben, dass der Sinn dieses Ausdrucks für diesen Zweck in geeigneter Weise *erweitert* und damit verändert wird. In diesem Sinn könnte die Rede von der Bezugnahme auf abstrakte Gegenstände auf der Grundlage von (AP) (in einem ersten Schritt) wie folgt bestimmt werden:

„‚Q(a)" und „Q(b)" beziehen sich auf dasselbe Q' bedeutet:
‚q' trifft auf die Gegenstände zu, auf die ‚a' und ‚b' sich beziehen.

Hiernach würde also etwa „‚Die Farbe von a" bezieht sich auf dieselbe Farbe wie „die Farbe von b"' dasselbe bedeuten wie „‚ist farbgleich mit" trifft auf die Gegenstände zu, auf welche „a" und „b" sich beziehen"'. Diese Form der Erläuterung könnte in Wrights Terminologie als Kontextdefinition der Rede von der Bezugnahme auf abstrakte Gegenstände bezeichnet werden. Hierbei werden also die Wahrheitsbedingungsangaben derjenigen Form, welche das

Syntaxprioritätsprinzip (SP) für die linken Seiten des Abstraktionsprinzips (AP) nahelegen würde, durch die entsprechenden Wahrheitsbedingungsangaben der rechten Seiten von (AP) *definiert*.

Doch auch wenn die Verwendung abstrakter Kennzeichnungen in dieser Weise durch Rückgriff auf den Ausdruck ‚Bezug' beschrieben wird, ändert sich natürlich nichts an dem Umstand, dass abstrakte und konkrete Kennzeichnungen in verschiedener Weise verwendet werden. Die durch die Wahl dieser Redeweise bewirkte Änderung besteht dann lediglich darin, dass die fraglichen Verwendungsunterschiede nicht mehr durch den Ausdruck ‚Bezug' gekennzeichnet werden (vgl. Wittgenstein PU, §10). Und ferner ergibt auch in diesem Fall eine Reflektion auf die Verifikationsschritte, welche von der in dieser Weise erweiterten Rede von der Bezugnahme kodifiziert werden, dass die Rede vom Bezug in dem Ausdruck ‚bezieht sich auf dasselbe F wie' verschiedene Bedeutung hat in Abhängigkeit davon, ob ‚F' ein konkretes bzw. ein spezifisches abstraktes Sortal ist. Denn wie zuvor erläutert, tut man jeweils verschiedene Dinge – und nicht: dasselbe mit verschiedenen Dingen –, wenn man feststellt, ob zwei Personenkennzeichnungen sich auf dieselbe Person, zwei Farbkennzeichnungen sich auf dieselbe Farbe oder zwei Längenkennzeichnungen sich auf dieselbe Länge beziehen.

In analoger Weise lässt sich nun auch die Rede davon explizieren, dass sich *ein* Ausdruck auf ein Q bezieht. Hierbei ist zunächst festzustellen, dass es im Prinzip zwecklos ist, den Ausdruck ‚bezieht sich auf ein Q' einer Q-Kennzeichnung ‚Q(a)' zuzuschreiben, da die Kennzeichnung den Ausdruck ‚Q' bereits enthält. Zu explizieren sind daher nur Aussagen, in denen – wie etwa in „‚Rot" bezieht sich auf eine Farbe' – der Ausdruck ‚bezieht sich auf Q' einem Q-Namen zugeschrieben wird. Es kann nun aber, wie es scheint angenommen werden, dass gilt:

„‚Q_i" bezieht sich auf ein Q' bedeutet dasselbe wie „‚Q_i" ist ein Q-Wort'.

Der Erklärung (3) aus Abschnitt 1.1 folgend, sind Ausdrücke somit in der folgenden Weise danach zu unterscheiden, ob sie sich auf Q beziehen oder nicht:

‚Q_i' bezieht sich auf ein Q $\Leftrightarrow$ Dass ‚Q_i' auf x und y zutrifft ist äquivalent dazu, dass ‚Q_i' auf x zutrifft, und x q zu y ist.

Hiernach würde also „‚Rot" bezieht sich auf eine Farbe' bedeuten: wenn ‚rot' auf einen Gegenstand a zutrifft, dann trifft ‚rot' auf genau diejenigen Gegenstände zu, die farbgleich zu a sind. Daher gilt auch in diesem Fall, dass die Rede vom Bezug in ‚bezieht sich auf ein F' verschiedene Bedeutung hat in Abhängigkeit davon, ob ‚F' ein konkretes oder ein spezifisches abstraktes Sortals ist. Während „‚Q_i‘ bezieht sich auf ein Q‘ also besagt, dass das Zutreffen von ‚Q_i‘ invariant unter der durch ‚q‘ ausgedrückten qualitativen Identität ist, besagt „‚a‘ bezieht sich auf eine Person‘, dass die Anwendung von ‚a‘ invariant unter raumzeitlicher Kontinuität (bzw. Identität) ist. Denn dass sich ‚a‘ auf eine Person bezieht, bedeutet: wenn ‚a‘ auf eine Person a angewendet werden kann und diese Person (raumzeitlich) identisch mit einer Person b ist, so kann ‚a‘ auch auf b angewendet werden.

Wenn man Wrights Darstellungen folgt, so müsste „‚a‘ bezieht sich auf ein Q‘ wie folgt in einen semantischen und einen metaphysischen Teil zerlegt werden können:

„‚a‘ bezieht sich auf ein Q‘ bedeutet:

(S) ‚a‘ bezieht sich auf einen Gegenstand a; und

(M) a ist ein Q.

Wie in Abschnitt 5.4 bereits erläutert wurde, ist dabei die vermeintlich semantische Bestimmung (S) nur syntaktisch (oder logisch) zu verstehen. Dass sich ‚a‘ auf einen Gegenstand – egal, ob konkreter oder abstrakter Art – bezieht, kann nur bedeuten, dass ‚a‘ ein singulärer Term (im syntaktischen oder logischen Sinn) ist. Aus diesem Grund wird auch der Ausdruck ‚bezieht sich auf‘ in (S) nicht semantisch und also nicht wie in „‚a‘ bezieht sich auf ein Q‘ verwendet.

Ferner ist die vermeintliche metaphysische Bestimmung (M) nur semantisch zu verstehen; d.h.: ‚a ist Q‘ bedeutet einfach dasselbe wie „‚a‘ bezeichnet ein Q‘. So kann zwar Wrights Bestimmung zugestimmt werden, wonach a genau dann ein Q ist, wenn die Identitätskriterien von a sich auf q beziehen. Aber bei dem, was (nicht nur) Wright als Identitätskriterien von Gegenständen bezeichnet, handelt es sich nicht um Eigenschaften von Gegenständen, sondern um Verwendungsregeln von Ausdrücken. Denn dass z.B. Farbgleichheit das Identitätskriterium von Rot und Zahlengleichheit das Identitätskriterium von Drei ist, wird nicht dadurch festgestellt, dass zwei Gegenstände, Rot und Drei, in entsprechender Weise untersucht werden. Es wird dadurch festgestellt, dass man auf die Verwendung der Ausdrücke ‚Rot‘ und ‚Drei‘ in entsprechenden Aussage reflektiert, also etwa Aussagen wie ‚Die Farbe von a ist Rot‘ oder ‚Die Anzahl der F ist Drei‘.

Nun zuletzt zur Analyse der Unterscheidung konkret/abstrakt! Auch diese Unterscheidung ist semantischer und nicht metaphysischer Art. Denn dass a ein konkreter Gegenstand ist, wird nicht dadurch festgestellt, dass a auf seine Konkretheit hin untersucht wird, sondern dadurch, dass sich darauf besonnen wird, ob die Einsetzung des Ausdrucks ‚a’ in konkrete Aussagekontexte – wie etwa ‚Dies ist a‘, ‚Dieses S ist identisch mit a‘ oder auch ‚a befindet sich bei (s,t)‘ – sinnvoll ist. Daher bedeutet ‚a ist ein konkreter Gegenstand‘ einfach dasselbe wie „‚a' bezieht sich auf einen konkreten Gegenstand'; nämlich, dass der Ausdruck ‚ist identisch mit' in ‚ist identisch mit a' für die raumzeitliche Identität steht. Und umgekehrt bedeutet ‚a ist ein abstrakter Gegenstand' dasselbe wie „‚a' bezieht sich auf einen abstrakten Gegenstand'. Dabei kann die Bedeutung dieses Ausdrucks ihrerseits also wie folgt bestimmt werden:

> „‚a' bezieht sich auf einen abstrakten Gegenstand' bedeutet: ‚Dieses S ist identisch mit a' ist sinnlos.

Obwohl sich die Rede von der Bezugnahme auf abstrakte Gegenstände in dieser Weise explizieren lässt, zeigen die zuvor angestellten Überlegungen und eben die fragliche Explikation, in welchem Masse diese Redeweise – aufgrund der Analogie zu Ausdrücken wie etwa „‚a' bezieht sich auf eine Person' – irreführend und damit für semantische Zwecke ungeeignet ist. Erstens suggeriert der Ausdruck „‚a' bezieht sich auf einen abstrakten Gegenstand', dass die Verwendungsweise von ‚a' durch den Ausdruck ‚bezieht sich auf' bereits in bestimmter Weise charakterisiert ist. Wie die obige Explikation zeigt, ist hiermit jedoch nichts Positives über die Verwendung von ‚a' gesagt; es ist wird im Prinzip nur gesagt, dass der durch ‚a' bestimmten Verifikationsschritt nicht in einer Suche (einem Ausfindig-Machen) besteht. Zweitens legt der Gebrauch des Ausdrucks ‚bezieht sich auf' dann jedoch genau diese Art Verwendung von ‚a' nahe, da die Rede vom Bezug im konkreten Fall eben auf diese Art des Verifikationsschritts verweist. Und drittens suggeriert der Ausdruck ‚abstrakter Gegenstand', dass es sich bei der Unterscheidung konkret/abstrakt nicht um eine semantische, sondern um eine materiale Unterscheid handelt; also um eine Unterscheidung zwischen Gegenständen.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich die soeben geäußerten und begründeten Bedenken auf die *Zweckmäßigkeit* des Ausdrucks ‚abstrakter Gegenstand' und nicht etwa auf die *Existenz* abstrakter Gegenstände beziehen. Die Redeweise von abstrakten Gegenständen ist in ähnlicher Weise irreführend wie die Rede von inneren Vorgängen, insofern Ausdrücke, die sich auf abstrakte Gegenstände bzw. auf innere Vorgänge beziehen – anders als es die Ausdrücke ‚Gegenstand' und ‚Vorgang' suggerieren – nur die Syntax, nicht jedoch die Semantik von Gegenstands- bzw. Vorgangswörtern haben (vgl. Wittgenstein PG, §42).

5.7 In diesem Abschnitt sollen nun zuletzt die *ontologischen* Existenzaussagen der Form ‚Es gibt Qs' (bzw. ‚Es gibt ein Q') diskutiert werden, also Aussagen wie ‚Es gibt Farben' oder ‚Es gibt Zahlen'. Hierbei sei zunächst an die Untersuchungen der durch konkrete Sortale gebildeten Existenzaussagen in den Abschnitten 1.6 und 1.7 erinnert. Wie dort erläutert wurde, bedeutet ‚Existenz' in diesem Fall: Präsenz an einen beliebigen Ort. Denn wie in Abschnitt 1.6 dargelegt, ist eine konkrete Existenzaussage ‚Es gibt ein F' zum Zeitpunkt t genau dann wahr, wenn es einen Ort s derart gibt, dass ‚Dies ist ein F' wahr bei (s,t) ist. Und der durch den Ausdruck ‚Es gibt' bestimmte Verifikationsschritt besteht in einer Suche eines solchen Ortes: wenn nicht bereits ein F am Ort des Verifizierenden präsent ist, dann muss dieser seinen Aufenthaltsort wechseln, um festzustellen, ob ein F an anderen Ort präsent ist. Da eine konkrete Prädikation der Form ‚a ist ein F' zum Zeitpunkt t genau dann wahr ist, wenn es einen Ort s derart gibt, dass sowohl ‚Dies ist a' als auch ‚Dies ist ein F' wahr bei (s,t) ist, lassen sich aus den Wahrheitsbedingungen konkreter Prädikationen und Existenzaussagen unmittelbar auch die beiden Implikationsregeln der Existenzgeneralisierung ableitbar, wonach also ‚a ist ein F' sowohl ‚Es gibt a' also auch ‚Es gibt ein F' impliziert.

Es sei nun wieder angenommen, ‚Q' sei ein abstraktes Sortal! Nach den Überlegungen von zuvor bedeutet dies, dass der Ausdruck ‚Dies ist ein Q' *sinnlos* ist. Wenn nun ‚Es gibt ein Q' nicht ebenfalls sinnlos sein soll, so kann der Ausdruck ‚Es gibt' hierin nicht dasselbe wie in einer konkreten Existenzaussage bedeuten. Denn der durch den Ausdruck ‚Es gibt' bestimmte Verifikationsschritt kann bei Kombination mit einem abstrakten Sortal ‚Q' nicht in der Suche nach einem Ort bestehen, an dem ‚Dies ist ein Q' wahr ist. Das bedeutet, dass die in Abschnitt 1.8 dargestellte Bereichsneutralitätsthese, der zu Folge die logischen Zeichen in allen Kontexten dieselbe Bedeutung haben, nicht nur in Bezug auf das Identitätszeichen irrig ist, sondern auch in Bezug auf den Existenzquantor. Ob und, wenn ja, welchen Sinn der Ausdruck ‚Es gibt' in einer Aussage der Form ‚Es gibt Qs' hat, soll sogleich noch näher untersucht werden. Es steht jedoch schon an dieser Stelle fest, dass er – anders als im konkreten Fall – nicht so viel bedeutet wie ‚irgendwo befinden sich'.

In diesem Zusammenhang ist ferner zu bemerken, dass, ebenso wie im Fall der Identität, auch im Fall der Existenz die Annahme, dass ‚Es gibt' im abstrakten Kontexten dasselbe wie in konkreten Kontexten bedeute, die *mythologische* Konzeption abstrakter Gegenstände motiviert. Denn wenn angenommen wird, dass Existenz ganz allgemein als Präsenz an irgendeinem Ort zu verstehen ist, dann scheint die Annahme eines dritten Reichs, in dem die abstrakten Gegenstände präsent sind und in dem nach ihnen zu suchen ist, kaum vermeidbar.[14]

Nun ist es natürlich zu begrüßen, dass moderne Platonisten wie etwa Wright, diese Art der Mythologie ablehnen. Wie die soeben angestellten Überlegungen zeigen, ergibt sich für deflationistische Positionen dieser Art jedoch eine grundsätzliche Schwierigkeit: wenn die Vorstellung eines eigenen Reichs abstrakter Gegenstände verworfen wird, dann muss auch anerkannt werden, dass abstrakte Gegenstände, wenn sie existieren, nicht in demselben Sinn

[14] Eine in diesem Sinn mythologische Konzeption abstrakter Gegenstände vertreten etwa Frege (1918) oder Popper in (1972).

existieren können wie konkrete Gegenstände. Das bedeutet nun zum einen, dass der Sinn der Rede von der Existenz abstrakter Gegenstände zunächst erklärt werden muss. Ohne eine solche Erklärung kann im Übrigen auch die Gültigkeit der von Wright (und auch von vielen anderen Platonisten) verwendeten Regel der *Existenzgeneralisierung* nicht beansprucht werden. Denn solange z.B. die Wahrheitsbedingungen von ‚Es gibt eine Farbe' nicht angegeben wurden, kann dieser Ausdruck auch nicht aus ‚Rot ist eine Farbe' abgeleitet werden; auch dann nicht, wenn Wrights Erklärung dieser Aussagen zugelassen werden. Zum anderen scheint es, dass eine platonistische Position, welche die Vorstellung eines eigenen Reichs abstrakter Gegenstände ablehnt, der nominalistischen Position, der zu Folge es zwar konkrete, jedoch keine abstrakten Gegenstände gibt, zumindest im Grundsatz zustimmt. Denn der eigentliche Punkt des Nominalisten ist natürlich der, dass Farben, Längen oder Zahlen nicht in demselben Sinn existieren wie Menschen, Häuser oder Planeten. Auch der Nominalist kann natürlich der These zustimmen, dass man so etwas wie ‚Es gibt Farben' sagen kann, wenn der Ausdruck ‚Es gibt' hierbei nicht dasselbe wie etwa in ‚Es gibt Menschen' bedeutet.[15]

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts soll nun untersucht werden, in welcher Weise ontologische Existenzaussagen der Form ‚Es gibt Qs' erklärt werden könnten. Diese Untersuchungen seien zunächst durch einen Erinnerung an die Überlegungen aus Abschnitt 5.2 eingeleitet. Wie dort erläutert wurde, hat der Ausdruck ‚ist identisch mit' jeweils verschiedenen Sinn, wenn er durch ein konkretes oder aber durch ein bestimmtes abstraktes Sortal ergänzt wird. Die Verwendung desselben Ausdrucks ‚identisch' verweist in diesem Fällen nicht auf eine einheitliche *Bedeutung*, sondern lediglich auf eine einheitliche *Logik*: der Ausdruck ‚ist identisch' drückt in jedem Fall die *Ersetzbarkeit* der links und rechts davon stehenden Ausdrücke aus.

Nun wurde bereits in Abschnitt 1.7 darauf hingewiesen, dass konkrete Existenzaussagen auch *substitutional* erklärt werden. Dass ‚Es gibt ein F' genau dann wahr bei t ist, wenn es ein s derart gibt, dass ‚Dies ist ein F' wahr bei (s,t) ist, kann auch dadurch ausgedrückt werden, dann man sagt, für alle Orte s gilt: ‚Dies ist ein F' bei (s,t) impliziert ‚Es gibt ein F' bei t. Die Implikationsregeln, durch welche die Bedeutung von ‚Es gibt' hierbei erklärt wird, sind nicht simultaner Art. Aus den bekannten und auch in Abschnitt 1.8 erläuterten Gründen, kann ‚Es gibt' nicht durch die Simultanimplikationen der Art „‚a ist ein F" impliziert „Es gibt ein F"" erklärt werden. Wenn jedoch die Existenz eines F in der Präsenz eines F an einem beliebigen Ort besteht, dann ist die Wahrheit einer Existenzaussage ‚Es gibt ein F' äquivalent zu der Existenz einer wahren Präsenzaussage ‚Bei s befindet sich ein F'. Und die Suche nach einer wahren Präsenzaussage dieser Art besteht eben in der Suche nach einem Ort, an dem die entsprechende demonstrative Aussage ‚Dies ist ein F' wahr ist. Die Bedeutung von ‚Es gibt' kann demnach wie

[15] Auf diesen Punkt soll in Abschnitt 8.5 noch einmal zurückgekommen werden.

folgt durch die auf Präsenzaussagen bezogenen Simultanimplikationen bzw. Wahrheitsbedingungsbedingungsangaben erklärt werden:

> Für jeden Ortsnamen ‚s' gilt: ‚Es gibt ein F' wird durch ‚Bei s befindet sich ein F' impliziert.

> ‚Es gibt ein F' ist wahr bei t ⇔ Es gibt einen Ortsnamen ‚s' derart, dass gilt:
> ‚Bei s befindet sich ein F' ist wahr bei t.

Die Überlegung, wonach *Identität* allgemein als *Ersetzbarkeit* zu verstehen ist, sowie die Substitutionserklärung konkreter Existenzaussagen – welche besser als Einsetzungserklärung bezeichnet werden sollte –, legen es nahe, *Existenz* ganz allgemein als *Einsetzbarkeit* zu verstehen. Hiernach müsste eine Aussage der Form ‚Es gibt ein A' jeweils durch Bezug auf eine durch ‚A' bestimmte Klasse von Ausdrücken A_T erklärt werden, deren Elemente ‚A' zu Aussagen (einer bestimmten Art) ergänzen. Wenn das System derjenigen Aussagen, die aus den Ergänzungen von ‚A' durch Ausdrücke aus A_T resultieren, durch A_E notiert wird, dann könnte die allgemeine Einsetzungserklärung von ‚Es gibt' in einer der beiden folgenden, äquivalenten Weisen dargestellt werden:

> Für jedes ‚p' in A_E gilt: ‚p' impliziert ‚Es gibt ein A'.

> ‚Es gibt ein A' ist wahr bei t ⇔ Es gibt ein ‚p' in A_E derart, dass gilt:
> ‚p' wahr bei t ist.

Aus diesen allgemeinen Erklärungen ergeben sich dann spezielle Erklärungen von ‚Es gibt' für verschiedene Kontexte. Handelt es sich bei ‚A' um ein konkretes Sortal, dann besteht die entsprechende Ergänzungsklasse A_T wie zuvor erläutert, aus den Präsenzoperatoren ‚Bei s befindet sich'. Sollte es sich bei ‚A' dagegen etwa um eine arithmetische Formel wie z.B. ‚x^2-4=0' handeln, dann besteht A_T aus den Ziffern für natürliche Zahlen. ‚Existenz' bedeutet in diesem Fall also wie *Lösbarkeit*.

Wenn die Wahrheitsbedingungen von ‚Es gibt ein A' in dieser Weise durch ein *System von Implikationsregeln* angegeben werden, dann sind diese Regeln zum einen per Definition gültig. Zum anderen sind Existenzaussagen in diesem Fall insofern nicht elementar, als sie – durch die fraglichen Implikationsregeln – durch Bezug auf Aussagen des grundlegenderen Typs A_E erklärt werden! Dabei bestimmt der den Ausdruck ‚Es gibt' ergänzende Ausdruck ‚A', um welchen Typ von Aussagen, es sich hierbei handelt. So bestimmen konkrete Sortale Präsenzaussagen bzw. Situationsaussagen; arithmetische Formeln bestimmen arithmetische Aussagen. Die allgemeine Einsetzungserklärung ist somit als eine Regel (Anweisung) für spezifische Erklärungen zu verstehen: sie bestimmt, in welcher Weise der Beitrag von ‚Es gibt' zu den Wahrheitsbedingungen von ‚Es gibt ein A' *in Abhängigkeit* von ‚A' zu bestimmen ist.

Dass der Ausdruck ‚Es gibt' verschiedene Bedeutung in verschiedenen Kontexten hat, obwohl in der Einsetzungserklärung eine einheitliche Erklärung aller dieser Kontexte zu bestehen scheint, erklärt sich daraus, dass die Einsetzungserklärung in dem soeben erläuterten Sinn eine Erklärung *zweiter Ordnung* ist. So könnte man zwar sagen, dass ‚Es gibt ein A' in jedem Fall in der Weise verifiziert wird, dass nach einer Aussage ‚p' aus A_E *gesucht* wird, die wahr ist. Dennoch ist die Art der Suche, für welche der Ausdruck ‚Es gibt' hierbei steht, abhängig von ‚A' (bzw. von A_E). Ist ‚A' ein konkretes Sortal, so bestimmt ‚Es gibt' die räumliche Suche nach (konkreten) Gegenständen; ist ‚A' eine arithmetische Formel, so besteht die durch ‚Es gibt' bestimmte Suche, in der Anwendung bestimmter Umformungsregeln auf ‚A'.

Aus dieser Überlegung erhellen zwei weitere, nicht unwichtige Punkte. Erstens muss, wenn die allgemeine Art der Erklärung von ‚Es gibt' im Sinn der Einsetzungserklärung bekannt ist, die Verwendung des Ausdrucks ‚Es gibt' in neuen Kontexten nicht notwendigerweise neuerlich erklärt werden. Denn falls klar ist, wie sich die durch ‚A' bestimmte Klasse A_E zusammensetzt, so stehen damit auch die Wahrheitsbedingungen von ‚Es gibt ein A' fest. Zweitens kann die Einsetzungserklärung als Kriterium dafür betrachtet werden, Ausdrücke, die bereits verwendet werden, als Existenzausdrücke zu identifizieren. So könnte man z.B. den Ausdruck ‚Irgendwo befindet sich' aufgrund der Regeln „‚Bei s befindet sich ein F" impliziert „Irgendwo befindet sich ein F" ' als Existenzausdruck identifizieren und durch den Ausdruck ‚Es gibt' bzw. ‚∃' ersetzen. Und ebenso sind es Implikationen der Art „‚2^2-4=0" impliziert „x^2-4=0 ist lösbar"', welche den Ausdruck ‚lösbar' als Existenzausdruck bestimmen. Das, was einen Ausdruck zu einem Existenzquantor macht und die Übertragung in die einheitliche Notation ‚∃x: ...' motiviert, ist der Umstand, dass der fragliche Ausdruck im Sinne der Einsetzungserklärung die Existenz einer wahren Aussagen innerhalb eine bestimmten Klasse von Aussagen ausdrückt.

Die konkreten Existenzaussagen der Form ‚Es gibt ein F' sind zwar als Konsequenzen aus entsprechenden Präsenzaussagen (bzw. aus Situationsaussagen) zu *erklären*. Aus diesen Erklärungen sind jedoch auch andere Implikationsregeln – wie etwa die folgenden drei Regeln – *ableitbar*:

‚Es gibt ein F' wird impliziert von

‚Es gibt ein F, welches G ist'

‚a ist ein F'

‚a ist dasselbe F wie b'

Hierbei ergibt sich die erste dieser Regeln daraus, dass ‚Es gibt ein F, welche G ist' genau dann wahr ist, wenn es einen Ortsnamen ‚s' gibt, so dass ‚Bei s befindet sich ein F, das G ist' wahr ist. Die Zweite ergibt sich daraus, dass ‚a ist F' genau dann wahr, wenn es ein ‚s' gibt, so dass ‚Bei s befindet sich a' und ‚Bei s befindet sich ein F' wahr sind. Und die dritte Regel ergibt sich daraus, dass ‚a ist dasselbe F wie b' genau dann wahr ist, wenn es ein ‚s' derart gibt, dass ‚Bei s befindet sich sowohl a als auch b' wahr ist.

Nun zurück zu den ontologischen Existenzaussagen der Form ‚Es gibt ein Q'! Wenn ‚Q', wie angenommen, ein abstraktes Sortal ist, dann entfällt also die Möglichkeit ‚Es gibt ein Q' durch Bezug auf Präsenz- oder Situationsaussagen zu erklären. Die Ergänzungsklasse Q_T kann nicht, wie im konkreten Fall, aus den Präsenzoperatoren ‚Bei s befindet sich' bestehen, da diese ‚Q' nicht sinnvoll ergänzen. Sinnvoll sind dagegen diejenigen durch ‚Q' gebildeten Aussagen, welche eine analoge Form wie die konkreten Aussagen haben, welche konkrete Existenzaussagen implizieren; d.h. also Aussagen der Form ‚a hat dasselbe Q wie b', ‚Q_i ist ein Q' oder auch die noch zu erläuternden Aussagen der Form ‚Es gibt ein Q, das ϕ ist'. Und es sind Aussagen dieser Art, aus denen Platonisten typischerweise die einfachen abstrakten Existenzaussagen der Form ‚Es gibt ein Q' ableiten. Damit Ableitungen dieser Art als gültig betrachtet werden können, müssen die entsprechenden Ableitungsprinzipien dadurch als *Definitionen* von ‚Es gibt' bestimmt werden, dass die Klasse der Aussagen, aus denen abgeleitet werden soll, als die Generalisierungsklasse Q_E bestimmt wird.

Angenommen zunächst, es werde bestimmt, dass ‚Es gibt ein Q' genau dann wahr ist, wenn es wahre Prädikationen der Form ‚x ist ein Q' gibt. In diesem Fall ist die Wahrheit von ‚Es gibt ein Q' gleichbedeutend mit der Existenz von eines (substantivischen) Q-Terms. Dass es in diesem Sinn Farben oder Längen gibt, bedeutet, dass es Ausdrücke wie etwa ‚Rot' oder 1 Meter' gibt, deren Verwendung durch die Beziehungen der Farb- bzw. der Längengleichheit bestimmt sind. Wird dagegen angenommen, ‚Es gibt ein Q' sei genau dann wahr, wenn es eine wahre Identitäten der Form ‚Q(a)=Q(b)' gibt, dann ist die Existenz von Farben oder Längen gleichbedeutend mit der Existenz zweier farb- bzw. längengleicher Gegenstände. Die Existenz eines Q in diesem Sinn wäre also nicht, wie im zuvor diskutieren Fall, eine semantische, sondern eine empirische Frage.

Nun zuletzt zu den bislang noch nicht diskutierten Aussagen der Form ‚Es gibt ein Q, welches ϕ ist'! Die Analyse dieser Aussagen kann zunächst durch eine allgemeine Überlegung zum Zusammenhang zwischen Existenzaussagen und Fragen eingeleitet werden. Eine Existenzaussage ‚Es gibt ein A' ist jeweils genau dann wahr, wenn es eine wahre Antwort auf diejenige Frage gibt, deren Antwortmenge aus A_E besteht. So ist, falls ‚F' ein konkretes Sortal ist, eine Existenzaussage der Form ‚Es gibt ein F, das G ist' genau dann wahr, wenn die Frage ‚Wo befindet sich ein F, das G ist?' in dem Sinn *beantwortbar* ist, dass eine ihrer möglichen Antworten wahr ist. Denn das System der Aussagen der Form ‚Bei s befindet sich ein F, das G ist' definiert nicht nur den Sinn der fraglichen Existenzaussage; dieses System bildet ebenfalls die Antwortmenge der genannten Frage.

Es sei nun das Beispiel der durch das abstrakte Sortal ‚Farbe' gebildeten Existenzaussage ‚Es gibt eine Farbe, welche die Farbe von a und die Farbe von b ist' betrachtet. Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn es einen Farbprädikat ‚Q_i' derart gibt, dass ‚a ist Q_i und b ist Q_i' wahr ist. Die Frage, welche diese Existenzaussage als beantwortbar behauptet, ist somit die Frage: ‚Welche Farbe, ist sowohl die Farbe von a als auch die Farbe von b?'. Anders als im konkreten Fall ist das abstrakte Sortal ‚Farbe' hierbei kein – oder, wenn doch, nur ein redundanter – Teilausdruck der Antworten auf diese Frage. Seine Funktion in der Frage besteht allein darin, die entsprechende Antwortmenge zu bestimmen, und zwar als die Menge derjenigen Aussagen, welche aus ‚a ist x und b ist x' durch Einsetzung von Farbtermen für x resultieren. Und ebenso generalisiert auch die Existenzaussage ‚Es gibt eine Farbe, welche die Farbe von a und die Farbe von b ist' eigentlich Aussagen, der Form ‚a ist x und b ist x', wobei die Funktion des Ausdruck ‚Farbe' darin besteht, die Klasse der für x einsetzbaren Ausdrücke auf die Klasse der Farbterme zu beschränken. Dieser Punkt scheint in der folgenden Weise verallgemeinert werden zu können: die Funktion von ‚Q' in einer Existenzaussage der Form ‚Es gibt ein Q, welches ϕ ist' besteht darin, eine – von ‚ϕ' eventuell nicht eindeutig bestimmte – Klasse von Ergänzungsausdrücken für ‚ϕ' zu bestimmen.[16] Wenn nun bestimmt wird, dass ‚Es gibt ein Q' genau dann wahr ist, wenn es wahr Aussage der Form ‚Es gibt ein Q, das ϕ ist' gibt, dann wird, der Sinn von ‚Es gibt' wesentlich von dem hierbei zulässigen Ausdrücken ‚ϕ' abhängen. Und sollte ‚ϕ' hierbei für Ausdrücke der Art ‚das Q von a und das Q von b' stehen, dann ist ‚Es gibt ein Q' wieder gleichbedeutend damit, dass es zwei Gegenstände gibt, die in der durch ‚Q' bestimmten Beziehung zueinander stehen.

[16] Die fragliche Ergänzungsklasse ist dann nicht durch den Ausdruck ‚ϕ' bestimmt, wenn ‚Q' hierin nicht schon enthalten ist; also etwa dann wenn Formulierungen der folgenden Art verwendet werden: ‚Es gibt ein Q, das sowohl a als auch b exemplifiziert'.

Auch ohne allen möglichen Deutungen von Ausdrücken der Form ‚Es gibt ein Q‘ nachgegangen zu sein, lässt sich sagen, dass das ontologische Problem der Existenz von Farben, Längen oder Zahlen insofern ein Scheinproblem ist, als der Sinn von Existenzkontexten der entsprechenden Art (so weit) unbestimmt ist. Wie die vorangegangenen Überlegungen zeigen, liegt diese Unbestimmtheit genauer in der fehlenden – und sich nicht von selbst verstehenden – Bestimmung desjenigen Typs von Aussagen, durch welche Existenzaussagen der fraglichen Art (per Definition) impliziert werden sollen. Die Schwierigkeit der Beantwortung ontologischer Fragen dieser Art ist somit auf die Unklarheit ihres Sinns zurückzuführen. Dabei scheint die Annahme, der Sinn dieser Frage sei bestimmt, ihrerseits auf die Annahme zurückzuführen zu sein, dass ‚Existenz' in allen Kontexten einen einheitlichen Sinn habe.

Unabhängig davon, in welcher Weise Existenzaussagen der Form ‚Es gibt ein Q‘ erklärt werden, stellt sich das Verhältnis dieser Aussagen zu anderen durch das abstrakte Sortal ‚Q‘ gebildeten Aussagen in grundlegend anderer Weise dar als im Fall konkreter Aussagen. Konkrete Identitäten und Prädikationen sind ebenso wie konkrete Existenzaussagen letztlich durch Bezug auf Situations- bzw. Präsenzaussagen zu erklären. Dabei zeigen diese Erklärungen, dass die einfachen Existenzaussagen elementarer als Aussagen der beiden anderen Typen sind, da diese sich als komplexe Existenzaussagen verstehen lassen. So bedeutet ‚a ist F‘ soviel wie ‚Es gibt ein S, das a und F ist‘, und ‚a=b‘ soviel wie ‚Es gibt ein S, das identisch mit a und mit b‘. Dagegen sind abstrakte Identitäten, abstrakte Prädikationen und sogar die abstrakten komplexen Existenzaussagen elementarer als die einfachen abstrakten Existenzaussagen ‚Es gibt ein Q‘, da eine Aussage letzterer Art, wie es scheint, nur als eine Generalisierung von Aussagen eines Typs, der zuvor genannten Art zu erklären ist. Aus Erklärungen dieser Art wird jedoch auch deutlich, dass diejenigen durch abstrakte Sortale gebildeten Aussagen, deren Verwendung tatsächlich einen Nutzen hat – nämlich die Identitäten, Prädikationen und komplexen Existenzaussagen – Erklärungen der einfachen abstrakten Existenzaussagen nicht voraussetzen. Es ist daher kein Zufall, dass ontologischen Existenzaussagen wie ‚Es gibt Farben‘ oder ‚Es gibt Zahlen‘ außerhalb philosophischer Diskussionen nicht gebraucht werden.

6. Arithmetische Gleichungen

In diesem Kapitel soll die Verwendung arithmetischer Gleichungen untersucht werden. Dabei soll für zwei zusammenhängende Thesen argumentiert werden, auf deren Grundlage dann in Kapitel 8 Wittgensteins Autonomiethese bewiesen werden soll. So soll zum einen in den Abschnitten 6.3 und 6.4 gezeigt werden, dass arithmetische Gleichungen insofern *syntaktische* Aussagen sind, als eine solche Gleichung genau dann wahr ist, wenn die bestimmten syntaktischen Regeln folgende Umformung der beiden links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme jeweils zu ein und derselben Ziffer führt. Zum anderen soll gezeigt werden, dass die *nominalistische* These berechtigt ist, der zu Folge die Arithmetik von Zeichen und nicht von abstrakten Gegenständen handelt.[1] Der hierfür erforderliche Nachweis, dass syntaktische Aussagen nicht als Aussagen über abstrakte Gegenstände aufzufassen sind, soll auf der Grundlage einer allgemeinen Analyse der Rede von Zeichen in den beiden Abschnitten 6.1 und 6.2 geführt werden. Da Quine und Goodman in ihrem Aufsatz *Constructive Nominalism* (1974) im Prinzip ein ähnliches Ziel verfolgen, sollen in Abschnitt 6.5 Gemeinsamkeiten und Unterschiede ihrer Konzeption zu der in den Abschnitten zuvor entwickelten Konzeption diskutiert werden.

6.1 Um zu klären, ob, und wenn ja, in welchen Sinn arithmetische Aussagen *von Zeichen handeln*, ist zunächst eine Untersuchung darüber erforderlich, wie Aussagen verwendet werden, welche unbestrittenermaßen von Zeichen handeln. Die folgenden Untersuchungen seien dabei der Einfachheit halber auf Aussagen über Schriftzeichen beschränkt.

Bekanntlich wird die in der Umgangssprache zweideutige Rede von der Gleichheit von Zeichen durch die Rede von der Identität von Zeichen*vorkommnissen* und von Zeichen*typen* unterschieden. Während mit der Identität von Zeichenvorkommnissen deren raumzeitliche Identität gemeint ist, handelt es sich bei der Typidentität von Zeichen um eine Äquivalenzrelation zwischen zwei Zeichenvorkommnissen. Dabei gelten zwei Zeichenvorkommnisse als *typgleich*, falls sie – in etwa – dieselbe *Form* bzw. Gestalt haben. Dagegen sind z.B. die Farben oder Schriftgrößen von Zeichenvorkommnissen für deren Typgleichheit unerheblich.

Die in Kapitel 5 dargestellten Prinzipien für die Verwendung von Ausdrücken für Äquivalenzrelationen gelten auch im Fall der Typidentität. (i) Die grundlegende Verwendung des Adjektivs ‚typgleich' besteht in dessen Anwendung auf zwei gegebene Zeichenvorkommnisse; d.h. also im Äußern einer demonstrativen Aussage der Form ‚Dieses Zeichen ist typgleich mit

[1] Diese semantische These fällt nicht mit ontologischen These des Nominalismus zusammen, wonach es keine abstrakten Gegenstände gibt. Wie in Abschnitt 5.7 bereits erläutert wurde, sollte diese ontologische These besser dahingehend ausgedrückt werden, dass der Ausdruck ‚Es gibt' in Verbindung mit abstrakten Sortalen nicht dieselbe

jenem' während des Zeigens auf zwei (raumzeitlich verschiedene) Zeichenvorkommnisse. (ii) Die entsprechende substantivische Formulierung ‚Dieses Zeichen hat denselben Typ wie Jenes' bestimmt der Ausdruck ‚Typ' als ein abstraktes Sortal. Als solches steht der Ausdruck ‚Typ' (oder auch ‚Zeichentyp') insofern nicht für eine bestimmte Gegenstandart, als es keine Praxis des Anwendens dieses Ausdrucks auf einzelne Gegenstände gibt. (iii) Der grundlegende Wirklichkeitsbezug des Substantivs ‚Typ' besteht vielmehr in der Klassifikation *zweier* Zeichenvorkommnisse durch die Anwendung des Ausdrucks ‚hat denselben Typ wie'. Und dieser Wirklichkeitsbezug ist also – ebenso wie der des entsprechenden Adjektivs ‚typgleich' – nicht kategorischer, sondern relationaler Art.

In analoger Weise wie die Typidentität sind auch andere syntaktische Zeichenrelationen wie etwa die dreistellige Relation der *Konkatenation* oder die vierstellige Relation der *Substitution* zu verstehen. Die grundlegende Verwendung entsprechender Ausdrücke besteht ebenfalls in deren Anwendung auf eine entsprechende Anzahl von Zeichenvorkommnissen, auf welche durch hinweisende Gesten verwiesen wird. Eine solche Verwendung des Ausdrucks ‚Konkatenation' bestünde also etwa darin, während des Zeigens auf drei zu ‚III', ‚II' bzw. ‚I' typgleiche Zeichenvorkommnisse die Aussage ‚Dieses Zeichen ist die Konkatenation von diesem und jenem' zu äußern. Und die grundlegende Verwendung des Ausdrucks für die Substitutionsrelation könnte sich z.B. derart gestalten, dass ‚Dieses Zeichen ist das Ergebnis der Substitution von jenem für jenes in jenem' geäußert wird, während nacheinander auf Zeichen gezeigt wird, welche typgleich zu ‚2+2', ‚2', ‚3' bzw. ‚3+2' sind.

Zeichenvorkommnisse, auf welche ein Relationsausdruck angewendet werden soll, können auch in die entsprechende Aussage aufgenommen werden. Zwei Möglichkeiten einer solchen Aufnahme werden illustriert durch die Aussagen ‚Dieses Zeichen ist typgleich mit diesem Zeichen: 0' bzw. ‚Dieses Zeichen ist typgleich mit „0"'. Beide Aussagen sind beim Zeigen auf ein Zeichenvorkommnis genau dann wahr, wenn das angezeigte Vorkommnis typgleich zu dem in die Aussage aufgenommen Zeichenvorkommnis ist. Die Anführungszeichen haben in Aussagen dieser Art also eine analoge Funktion wie die hinweisende Geste in einer Aussage der Form ‚Dieses Zeichen ist typgleich mit jenem' (vgl. hierzu Künne 1983, S. 192; Wittgenstein PU, §16). Die Ersetzung des Demonstrativums ‚jenes' durch das angeführte Zeichen eliminiert eine Stelle des Relationszeichen ‚typgleich'. So erhält man durch den Übergang von dem zweistelligen Prädikat ‚typgleich' zum Ausdruck ‚typgleich mit „0"' ein einstelliges Prädikat. Und dabei erhält das im Prädikat angeführte Zeichenvorkommnis die Rolle eines Musters (Paradigmas), insofern das Prädikat ‚typgleich mit „0"' genau dann auf ein Zeichenvorkommnis zutrifft, wenn dieses typgleich mit dem im Prädikat angeführten Zeichen ist. Weitere Beispiele einstelliger Prädikate, welche in dieser Weise Zeichen danach klassifizieren, ob diese in bestimmten syntaktischen

Beziehungen zu angeführten Musterzeichen stehen, wären etwa ‚Konkatenation aus „II" und „I"' oder ‚Substitution von „2" für „3" in „3+2"'.

Extensiv definierte Zeichenprädikate sind als Abkürzungen solcher Zeichenprädikate zu verstehen. Die extensive Definition eines Zeichenprädikats ‚F' durch die Angabe eine *Liste* von Zeichen, bestimmt, dass ‚F' genau dann auf ein Zeichen x zutrifft, wenn ein mit x typgleiches Zeichenvorkommnis auf der Liste steht. Und wenn in dieser Weise z.B. das Prädikat ‚Buchstabe' durch die Liste des Alphabets definiert wird, dann bedeutet ‚Buchstabe' dasselbe wie die Diskunktion der Prädikate ‚typgleich mit „a", ..., ‚typgleich mit „z"'. Die *rekursive* Definition eines Zeichenprädikats ‚F' besteht darin, dass, abgesehen von der Angabe einer Liste von Grundzeichen, eine oder mehre syntaktischen Operationen spezifiziert werden, unter deren wiederholter Anwendung das Zutreffen von ‚F' invariant ist. Die Dezimalziffern wurden in Kapitel 4 in dieser Weise definiert. In analoger Weise kann auch das Prädikat ‚Strichziffer' durch die Bestimmung definiert werden, dass ‚Strichziffer' auf jede beliebige Konkatenationen von ‚I' anwendbar ist.

Durch die folgenden beiden Definitionen seien nun zwei für die weiteren Diskussionen relevanten Arten von Zeichenprädikaten unterschieden:

> Ein Zeichenprädikat ‚F' heiße genau dann *typkongruent*, wenn gilt: Wenn ‚F' auf x zutrifft, und x′ typgleich mit x ist, dann trifft ‚F' auch auf x′ zu.

> ‚F' heiße genau dann *typeindeutig*, wenn gilt: Wenn ‚F' auf x zutrifft und x′ nicht typgleich mit x ist, dann trifft ‚F' nicht auf x′ zu.

Wenn die Relationsausdrücke für die Typgleichheit, Konkatenation oder Substitution im zuvor geschilderten Sinn durch die Ergänzung angeführter Zeichenvorkommnisse zu (einstelligen) Zeichenprädikaten umgewandelt werden, dann sind diese Prädikate sowohl typkongruent als auch typeindeutig. Denn wenn z.B. das Prädikat ‚Konkatenation aus „II" und „I"' auf ein Zeichenvorkommnis x zutrifft, dann trifft es auf ein anderes Vorkommnis x′ genau dann zu, wenn x und x′ typgleich sind. Die rekursiven Prädikate ‚Strichziffer' und ‚Dezimalziffer' sind zwar typkongruent, aber nicht typeindeutig. Und weder typkongruent, noch typeindeutig sind z.B. Prädikate für Schriftgrößen oder Schriftarten.

Das Zutreffen typkongruenter bzw. typeindeutiger Prädikate kann als Kriterium für die Typgleichheit von Zeichenvorkommnissen verwendet werden. So kann z.B. daraus, dass das typkongruente Prädikat ‚Strichziffer' zwar auf x, nicht jedoch auf x′ zutrifft, darauf geschlossen werden, dass x und x′ nicht typgleich sind. Und analog hierzu kann daraus, dass das typeindeutige Prädikat ‚Konkatention aus „II“ und „I“‘ sowohl auf x als auch auf x′ zutrifft, darauf geschlossen werden, dass x und x′ typgleich sind. Es ist in diesem Zusammenhang ferner zu bemerken, dass typeindeutige Prädikate in Verbindung mit dem bestimmten Artikel verwendet werden können. In diesem Sinn kann man also etwa während des Zeigens auf ein Zeichenvorkommnis ‚Dieses Zeichen ist *die* Konkatenation von „II“ und „I“‘ sagen. Dagegen müsste in Verbindung mit dem nicht typeindeutigen Prädikat ‚Strichziffer’ der unbestimmte Artikel und also die Formulierung ‚Dieses Zeichen ist *eine* Strichziffer‘ gebraucht werden.

Durch Relationsausdrücke und Prädikate der bisher geschilderten Art lassen sich *empirische* Aussagen darüber machen, dass sich irgendwo bestimmte Zeichenvorkommnisse befinden und in bestimmten Relationen zueinander bzw. zu in den Aussagen angeführten Zeichen stehen. Aus der Zweideutigkeit der Rede von der Identität von Zeichen im Sinn der raumzeitlichen Identität bzw. im Sinn der Typidentität ergeben sich nicht nur für Aussagen über die Identität, sondern auch für Aussagen über die Anzahl von Zeichen zum Teil gewisse Zweideutigkeiten. So kann etwa, wenn von der *Anzahl verschiedener Zeichen* die Rede ist, sowohl die Anzahl raumzeitlich verschiedener oder aber die Anzahl typverschiedener Vorkommnisse gemeint sein. In diesem Sinn bedeutet z.B. die Aussage ‚An der Tafel stehen vier Zeichen‘ entweder: An der Tafel stehen vier raumzeitlich verschiedene Zeichenvorkommnisse. Oder aber sie bedeutet: An der Tafel stehen vier paarweise typverschiedene Zeichenvorkommnisse derart, dass jedes an der Tafel stehende Zeichenvorkommnis, welches von diesen vier Vorkommnisses raumzeitlich verschiedenen ist, typgleich zu einem dieser vier Vorkommnisse ist. Die Rede von der *Anzahl desselben Zeichens* ist dagegen stets eindeutig im Sinn der Typgleichheit zu verstehen. So ist etwa die Aussage ‚Das Zeichen „0“ steht viermal an der Tafel‘ gleichbedeutend mit der Aussage ‚An der Tafel stehen vier raumzeitlich verschiedene Zeichenvorkommnisse, welche typgleich mit „0“ sind‘.

Der empirische bzw. *zeitliche* Charakter der bislang untersuchten Aussagen ist darauf zurückzuführen, dass in diesen Aussagen jeweils die Anwendbarkeit von Zeichenrelationen auf Zeichenvorkommnisse behauptet wird, von denen zumindest Eines nicht in der Aussage selbst enthalten ist. Die Verwendung von Aussagen, welche alle solchen Zeichenvorkommnisse enthalten, sei nun anhand er beiden Aussagen ‚„III“ ist die Konkantenation aus „II“ und „I“‘ und ‚„Oben“ hat vier Laute‘ untersucht. Diese Untersuchung orientiert sich an Wittgensteins Darstellungen in (BGM, VI §36), denen auch das zweite Beispiel entnommen ist.

Hinsichtlich der Verwendung von Aussagen dieser Art sind drei wesentliche Punkte festzuhalten: (i) Die Wahrheit oder Falschheit einer solcher Aussage wird an der Aussage – also am Aussagausdruck – allein erkannt. Denn da eine Aussage dieser Art die durch sie beschriebenen Zeichen bereits enthält, wird sie allein durch eine Betrachtung der Aussage selbst verifiziert. So stellt man die Wahrheit von „„III" ist die Konkantenation aus „II" und „I"' in der Weise fest, dass man feststellt, dass der Relationsausdruck ‚Kontatenation' auf die drei in der Aussage angeführten Zeichenvorkommnisse anwendbar ist. Und ebenso wird, dass „„oben" hat vier Laute' wahr ist, durch das Zählen der Buchstaben des angeführten Ausdrucks festgestellt.

(ii) Aussagen dieser Art sind *analytisch* bzw. *zeitlos*. Da die Relation der Konkatenation in allen Stellen kongruent ist, muss auch jeder Wiederholung der Verifikation von „„III" ist die Konkantenation aus „II" und „I"' immer und überall zu demselben Ergebnis führen. Und in analoger Weise bestimmt auch die Typkongruenz des Prädikats ‚hat vier Laute' die Aussage „„oben" hat vier Laute' als zeitlos.[2]

(iii) Aussagen dieser Art bestimmen *Implikationsbeziehungen* zwischen Zeichenprädikaten. Dass „„III" ist die Konkantenation aus „II" und „I"' wahr ist, bedeutet, dass das Prädikat ‚Konkantenation aus „II" und „I"' auf das Zeichen ‚III' zutrifft. Und da ‚Konkantenation aus „II" und „I"' sowohl typkongruent als auch typeindeutig ist, folgt hieraus, dass die Prädikate ‚typgleich zu „III"' und ‚Konkantenation aus „II" und „I"' immer und überall auf dieselben Zeichenvorkommnisse zutreffen. Somit bestimmt also die Wahrheit von „„III" ist die Konkatenation aus „II" und „I"' die folgende Regel: ‚typgleich zu „III"' ist äquivalent zu ‚Konkatenation aus „II" und „I"'. Und analog hierzu bestimmt die Typkongruenz von ‚hat vier Laute' sowie die Wahrheit von „„oben" hat vier Laute', dass ‚hat vier Laute' auf jedes Zeichenvorkommnis zutrifft, auf welches ‚ist typgleich mit „oben"' zutrifft. Die Wahrheit von „„oben" hat vier Laute' bestimmt somit also, dass ‚hat vier Laute' von ‚typgleich mit „oben"' impliziert wird. Ebenso wie etwa die Feststellung, dass das Rottäfelchen nicht farbgleich mit dem Grüntäfelchen ist, einen Beweis der Regel darstellt, dass ‚rot' und ‚grün' nicht simultan auf denselben Gegenstand zutreffen können, können also durch die Verifikationen bestimmter syntaktischer Aussagen logische Regeln für die Verwendung entsprechender Zeichenprädikate bewiesen werden. Ein Beweis dieser Art beruht dabei auf der Typkongruenz oder der Typeindeutigkeit von Zeichenprädikaten einerseits, und auf der Möglichkeit, Zeichenvorkommnisse als Muster für Zeichenprädikate zu verwenden, andererseits. Im Folgenden soll anhand verschiedener Beispiele erläutert werden, in welcher Weise von der Form einer zeitlosen syntaktischen Aussage die Art der durch sie bestimmten logischen Regel abhängt.

Eine Aussage, welche wie etwa ‚Die Konkatenation aus „II" und „I" ist eine Strichziffer' aus der Verknüpfung eines typeindeutiges Prädikats mit einem nicht typeindeutigen Prädikat resultiert, hat die Form einer *Prädikation*. Falls eine solche Aussage wahr ist, so gilt die

[2] In Abschnitt 8.7 wird noch zu erläutern sein, dass die hier diskutierten syntaktischen Aussagen in einem anderen Sinn zeitlos sind als empirische Aussagen über explizit genannte Raumzeitstellen wie etwa Aussagen der Form ‚Bei (s,t) regnet es'.

*Implikation*sregel, wonach das nicht typeindeutige Prädikat auf alle Zeichenvorkommnisse zutrifft, auf welches auch das typeindeutige Prädikat zutrifft. So bestimmt also etwa die Wahrheit von ‚Die Konkatenation aus „II“ und „I“ ist eine Strichziffer‘, dass ‚Strichziffer‘ auf jedes Zeichenvorkommnis zutrifft, auf welches auch ‚Konkatenation vom „II“ und „I“‘ zutrifft. Verifiziert wird diese Aussage durch Analyse der beiden Zeichenprädikate, d.h. also durch eine Reflektion auf deren Verwendung. Durch eine solche Analyse lässt sich z.B. erkennen, dass ein Zeichen, welches durch die Konkatenation von ‚II‘ und ‚I‘ gebildet *wäre*, eine Konkatenation von Strichen wäre. Eine Prädikation dieser Art hat also keine empirischen Implikationen, insofern ihre Wahrheit nicht voraussetzt, dass es irgendwo Zeichenvorkommnisse gibt, auf welche die fraglichen Prädikate zutreffen. So setzt etwa die Wahrheit von ‚Die Konkatenation aus „II“ und „I“ ist eine Strichziffer’ nicht voraus, dass sich irgendwo ein zu ‚III’ typgleiches Vorkommnis ausfindig machen lässt. In diesem Zusammenhang ist ferner zu bemerken, dass negative Prädikationen dieser Art *Exklusion*sregeln bestimmen. So bedeutet z.B. die Aussage ‚Die Konkatenation aus „II“ und „I“ ist keine Dezimalziffer‘ in etwa so viel: die Prädikate ‚Konkatenation aus „II“ und „I“‘ und ‚Dezimalziffer‘ schließen einander aus.

Aussagen, welche aus der Verknüpfung zweier typeindeutiger Prädikate resultieren und damit die Form von *Identitätsaussagen* haben, bestimmen *Äquivalenz*regeln. In diesem Sinn bestimmt also etwa die Aussage ‚Die Konkatenation von „2+“ und „2“ ist identisch mit der Resultat der Substitution von „2“ für „3“ in „3+2“‘ die Regel: ‚die Konkatenation von „2+“ und „2“‘ ist äquivalent zu ‚das Resultat der Substitution von „2“ für „3“ in „3+2“‘. Auch eine Aussage dieser Art setzt nicht die raumzeitliche Existenz von Zeichenvorkommnissen voraussetzt, auf welche die beiden in der Aussagen enthaltenen Zeichenprädikate zutreffen.

Syntaktische *Existenzaussagen* sind als *Kohärenz*regeln zu verstehen. In diesem Sinn bestimmt also etwa die Aussage ‚Es gibt eine mit „1“ beginnende und mit „0“ endende Dezimalziffer‘, dass die beiden Prädikate ‚mit „1“ beginnend und mit „0“ endend‘ und ‚Dezimalziffer‘ einander nicht wechselseitig ausschließen. Eine negative Existenzaussage wie etwa ‚Es gibt keine mit „0“ beginnende und mit „1“ endende Dezimalziffer‘ bestimmt dagegen die *Unvereinbarkeit* zweier Prädikate; in diesem Fall also der Prädikate ‚mit „0“ beginnend und mit „1“ endend‘ und ‚Dezimalziffer‘. Auch Aussagen dieser Art werden durch eine Reflektion auf die Verwendung der entsprechenden Zeichenprädikate verifiziert. So kann etwa die Wahrheit von ‚Es gibt eine mit „1“ beginnende und mit „0“ endende Dezimalziffer‘ durch die Überlegung festgestellt werden, dass auf ein durch die Konkatenation aus ‚1‘ und ‚0‘ gebildetes Zeichenvorkommnis sowohl das Prädikat ‚mit „1“ beginnend und mit „0“ endend‘ als auch das Prädikat ‚Dezimalziffer‘ anwendbar wäre. Die raumzeitliche Existenz eines

Zeichenvorkommnisses, auf welches beide Prädikate zutreffen, muss dabei wiederum nicht vorausgesetzt werden.

6.2 Im Abschnitt zuvor wurde dafür argumentiert, dass syntaktische Aussagen in zeitliche und zeitlose Aussagen unterteilt werden können. Während zeitliche Aussagen die Anwendbarkeit syntaktischer Prädikate bzw. Relationsausdrücke auf bestimmte, nicht in der Aussage selbst gegebene Zeichenvorkommnisse behaupten, bezieht sich eine unzeitliche Aussage ausschließlich auf Zeichenvorkommnisse, die in der Aussage selbst gegeben sind. Wie in diesem Zusammenhang erläutert wurde, drücken zeitlose Aussagen aus diesem Grund logische Beziehungen zwischen verschiedene Zeichenprädikate bzw. Relationsausdrücken aus.

Üblicherweise werden syntaktische Aussagen danach unterschieden, über welche *Art von Gegenstand* sie sprechen. Hiernach handeln solche Aussagen entweder von *konkreten* Zeichenvorkommnissen oder aber von als *abstrakten* Gegenständen aufgefassten Zeichentypen. Da diese Unterscheidung nicht mit der zwischen zeitlichen und zeitlosen Aussagen zusammenfällt, soll im Folgenden anhand von Beispielen zeitlicher und zeitloser Aussagen dafür argumentiert werden, dass sich die Verwendung syntaktischer Aussagen in *keinem* Fall adäquat beschreiben lässt als ein Reden über abstrakte Gegenstände. Dabei soll insbesondere erläutert werden, dass auch Aussagen, welche die Existenz unendlich vieler Zeichen einer bestimmten Art behaupten, nicht als Behauptungen über abstrakte Gegenstände zu verstehen sind.

Ein erster Typ von Aussagen, welche z.B. Künne als Aussagen über abstrakte Gegenstände auffasst, wird durch die Aussage ‚Das Zeichen „0" steht viermal an der Tafel' illustriert (vgl. Künne 1983, S. 187). Dafür, dass Aussagen dieser Art von abstrakten Gegenständen handeln, argumentiert Künne in der folgenden Weise. Zunächst wird angenommen, die Aussage ‚Das Zeichen „0" steht viermal an der Tafel' behaupte etwas über das darin angeführte Zeichen, nämlich, dass dieses viermal an der Tafel steht. Da dies jedoch unmöglich von einem einzelnen Zeichenvorkommnis – also von einem konkreten Gegenstand – ausgesagt werden kann, muss sich die Aussage auf den durch das Vorkommnis exemplifizierten Typ – und damit also auf einen abstrakten Gegenstand – beziehen. Wie jedoch im Abschnitt zuvor bereits erläutert wurde, ist die Aussage ‚Das Zeichen „0" steht viermal an der Tafel' gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Es gibt an der Tafel vier Zeichenvorkommnisse, die typgleich zu ‚0' sind. Denn beide Aussagen werden durch die Zählung der zu ‚0' typgleichen Zeichenvorkommnisse verifiziert, welche an der fraglichen Tafel stehen. Aus diesem Grund ist es irreführend, zu sagen, die Aussage ‚Das Zeichen „0" steht viermal an der Tafel' handle von einem abstrakten Gegenstand. Es wäre sicher angemessener, zu sagen, sie handle von den (konkreten) Zeichenvorkommnissen, die auf der fraglichen Tafel stehenden. Und die Anführung des

Zeichens ‚0' in der Aussage hat dabei die Funktion ein Musters zur weiteren Eingrenzung dieser Zeichenvorkommnisse.

Die Aussage ‚An der Tafel stehen vier verschiedene Zeichen' exemplifiziert einen weiteren Typ von Aussagen, welche verschiedentlich als Aussagen über abstrakte Gegenstände aufgefasst werden. Eine entsprechende Analyse solcher Aussagen könnte sich dabei in etwa wie folgt gestalten: Wenn die Verschiedenheit von Zeichen hierin im Sinn der raumzeitlichen Identität verstanden wird, so handelt die Aussage von konkreten Gegenständen, nämlich von Zeichenvorkommnissen. Wird die Verschiedenheit von Zeichen dagegen im Sinn der Typverschiedenheit verstanden, so handelt die Aussage von Zeichentypen und damit, so die realistische Auffassung, von abstrakten Gegenständen. Hierzu ist zunächst zu bemerken, dass die Aussage ‚An der Tafel stehen vier verschiedene Zeichen' in beiden Deutungen durch die Zählung von Zeichenvorkommnissen verifiziert wird. Der Unterschied zwischen diesen beiden Deutungen besteht nicht darin, dass in beiden Fällen Gegenstände verschiedener Art in derselben Weise gezählt werden, sondern darin, dass dieselben Gegenstände in verschiedener Weise gezählt werden. So wird im dem Fall, dass die Verschiedenheit im Sinn der Typverschiedenheit zu verstehen ist, ein gegebenes Zeichenvorkommnis nur dann gezählt, wenn zuvor nicht schon ein hierzu typgleiches Vorkommnis gezählt wurde. Aus diesem Grund handelt die Aussage ‚An der Tafel stehen vier verschiedene Zeichen' auch in dieser Deutung von Zeichenvorkommnissen und kann, wie im Abschnitt zuvor erläutert, wie folgt paraphrasiert werden: an der Tafel stehen vier paarweise typungleiche Zeichenvorkommnisse derart, dass jedes andere dort stehende Zeichenvorkommnis typgleich zu einem dieser vier Vorkommnisse ist.

Als drittes und letztes Beispiel einer Aussage, welche man als Aussage über abstrakte Gegenstände aufzufassen versucht sein könnte, sei nun die Verwendung der Aussage ‚Die Konkatenation von „II" und „I" ist eine Strichziffer' diskutiert. Da diese Aussage die Form einer Prädikation hat, könnte man annehmen, der Ausdruck ‚Die Konkatenation von „II" und „I"' fungiere hierin als Kennzeichnung eines bestimmten Gegenstands, so dass die fragliche Aussage dementsprechend nur dann wahr sein kann, wenn es einen und nur einen solchen Gegenstand gibt. Da diese Aussage aber offenbar auch dann wahr sein kann, wenn der Ausdruck ‚Konkatenation von „II" und „I"' entweder auf kein Zeichenvorkommnis oder aber auf mehrere Vorkommnisse zutrifft, kann sich die Kennzeichnung ‚die Konkatenation von „II" und „I"' scheinbar nur auf einen Zeichentyp beziehen. Es ist nun zunächst zu bemerken, dass der bestimmte Artikel in ‚Die Konkatenation von „II" und „I" ist eine Strichziffer' in zweierlei Weise verstanden werden kann. Zum einen kann er *raumzeitliche Eindeutigkeit* anzeigen. In diesem Fall ist die Aussage als eine elliptische Aussage über ein bestimmtes Zeichenvorkommnis zu verstehen, welche also z.B. soviel wie ‚Die an der Tafel stehende Konkatenation von „II" und „I" ist eine

Strichziffer‘ bedeuten könnte. Zum anderen kann, wie im Abschnitt zuvor bereits erläutert, der bestimmte Artikel auch die *Typeindeutigkeit* des auf ihn folgenden Prädikats anzeigen. Bei dieser Deutung zeigt der bestimmte Artikel in ‚die Konkatenation von „II“ und „I“‘ also an, dass das Prädikat ‚Konkatenation von „II“ und „I“‘ nur auf höchstens eines von zwei typungleichen Zeichenvorkommnissen anwendbar ist. Allerdings behauptet die Aussage ‚Die Konkatenation von „II“ und „I“ ist eine Strichziffer‘ auch bei dieser Deutung nicht, dass das Prädikat ‚Strichziffer’ auf einen bestimmten abstrakten Gegenstand anwendbar ist. Vielmehr behauptet sie, dass ‚Strichziffer’ auf jedes Zeichenvorkommnis anwendbar ist, auf welches auch ‚Konkatenation von „II“ und „I“‘ anwendbar ist.

Gemäß nominalistischer Auffassung setzt die Arithmetik deshalb nicht die Existenz abstrakter Gegenstände voraus, weil arithmetische Aussagen von Ziffern bzw. Zahlzeichen handeln. Der Standardeinwand gegen nominalistische Konzeptionen dieser Art lautet in etwa wie folgt: Selbst wenn die arithmetische Rede über Zahlen als Rede über Ziffern zu verstehen wäre, so können arithmetische Aussagen nicht von Ziffernvorkommnissen, sondern nur von Ziffertypen und also von abstrakten Gegenständen handeln. Denn während es stets nur endlich viele Ziffernvorkommnisse gibt, implizieren die Peano-Axiome die Existenz unendlich vieler Zahlen.

Bereits an dieser Stelle ist klar, dass dieser Einwand aufgrund der irrigen Annahme ungültig ist, dass Aussagen über Zeichentypen als Aussagen über abstrakte Gegenstände zu verstehen sind. Richtig ist, dass der Sinn der Rede von Anzahlen stets bezogen ist auf eine bestimmte Art der Identität und somit auf einen bestimmten Sinn der Ausdrücke ‚identisch’ und ‚verschieden’. Wie zuvor erläutert, gilt jedoch auch dann, wenn die Verschiedenheit von Ziffern im Sinn der Typverschiedenheit verstanden wird, dass entsprechende Aussagen über die Identitäten und Anzahlen von Ziffern nicht als Aussagen über abstrakte Gegenstände zu verstehen sind. So folgt etwa daraus, dass die Aussage ‚Es gibt *mindestens eine* mit „1“ beginnende und mit „0“ endende Dezimalziffer‘ nicht die Existenz eines konkreten Vorkommnisses behauptet, nicht, dass sie die Existenz eines Gegenstands anderer Art behauptet. Wie im Anschnitt zuvor erläutert, behauptet diese Aussage vielmehr die *Vereinbarkeit* der Prädikate ‚Dezimalziffer’ und ‚mit „1“ beginnend und mit „0“ endend‘. Und analog hierzu behauptet z.B. die Aussage ‚Es gibt *genau eine* zweistellige Dezimalziffer, welche mit „1“ beginnt und mit „0“ endet‘ die Widerspruchsfreiheit und Typeindeutigkeit des Prädikats ‚zweistellige Dezimalziffer, welche mit „1“ beginnt und mit „0“ endet‘.

Ob die Verwendung arithmetischer Aussagen nominalistisch zu charakterisieren ist, wird in den nächsten drei Abschnitten noch ausführlich zu diskutieren sein. An dieser Stelle soll zunächst noch die Frage untersucht werden, wie die Rede von der Existenz unendlich vieler

Zeichen zu verstehen ist. Nach üblichem Verständnis ist eine Unendlichkeitsaussage der Form ‚Es gibt unendlich viele F' genau dann wahr, wenn jede der unendlich vielen Aussagen der Form ‚Es gibt mindestens n F' (bzw. kurz: ‚$n_M(F)$') wahr ist. Wie bereits im Rahmen der Diskussion von Quines Definition logischer Wahrheit in Kapitel 3.3 erläutert wurde, gibt es keine fallweise Verifikation unendlich vieler Aussagen. Dass unendlich viele Aussagen einer bestimmten Art wahr sind, kann *nur* durch das Finden bzw. Konstruieren eines *Beweises* festgestellt werden, welcher zeigt, dass die Verifikation einer beliebigen Aussage der fraglichen Art deren Wahrheit ergeben *muss*. Ein solcher Beweis muss also in der Angabe einer *Regel* bestehen, nach der sich die speziellen Tautologiebeweise für die fraglichen Aussagen konstruieren lassen. Da die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen Regelangabe über Wahrheit und Falschheit einer Unendlichkeitsaussage entscheidet, ist hierdurch – also durch die Möglichkeit einer solchen Regelangabe – auch deren Sinn bestimmt. Der Inhalt einer Unendlichkeitsaussage – das, was sie behauptet – ist also nicht, dass eine fallweise Verifikation von Aussagen der Form ‚$n_M(F)$' jede dieser Aussagen als wahr erweisen würde. Sondern was sie behauptet, ist eben, dass die Konstruktion eines Beweises möglich ist, dem der tautologische Charakter beliebiger Aussagen der Form ‚$n_M(F)$' entnommen werden kann.

Eine Unendlichkeitsaussage kann nur durch die Angabe einer Regel bewiesen werden, welche zeigt, wie sich zu einer beliebigen endlichen Menge von Fs, ein weiteres F finden bzw. erzeugen lässt.[3] Denn durch die sukzessive Anwendung dieser Regel lassen sich dann beliebig viele F finden bzw. erzeugen und damit (sukzessive) alle beliebigen Aussagen der Form ‚$n_M(F)$' als wahr erweisen. Falls es sich bei ‚F' um ein syntaktisches Prädikat handelt, muss eine solche Regel zeigen, wie aus einer beliebigen Liste von Zeichen, auf welche ‚F' zutrifft, ein *anderes* Zeichen konstruiert werden kann, auf welches ‚F' ebenfalls zutrifft. Und es ist klar, dass, wenn etwa von der Unendlichkeit des Dezimalsystems die Rede ist, die Verschiedenheit des neuen Zeichens von den aufgelisteten Zeichen im Sinn der Typverschiedenheit zu verstehen ist. Ein Beweis dafür, dass es unendliche viele Zeichen gibt, auf welche ‚F' zutrifft, besteht also in der Angabe einer syntaktischen Operation, deren Anwendung auf Zeichenvorkommnisse, auf welche ‚F' zutrifft, zu einem typungleichen Zeichenvorkommnis führt, auf welches ebenfalls ‚F' zutrifft. In diesem Sinn kann, dass es unendlich viele Strichziffern gibt, durch den Hinweis darauf bewiesen werden, dass die Konkatenation beliebig vieler Strichziffern stets in einer von diesen Strichziffern typungleichen Strichziffer resultiert. In analoger Weise, also durch Verweis auf die Konkatenation endlicher vieler Zeichen, ließe sich auch zeigen, dass es unendlich viele Dezimalziffern gibt. Alternativ hierzu ließe sich die Unendlichkeit des Strichziffernsystems und für die des Dezimalsystems auch durch Bezug auf die im nächsten Abschnitt zu diskutierenden

[3] Es sei bemerkt, dass die Rede von ‚Finden' die Möglichkeit aktualer Unendlichkeiten offen lässt.

Nachfolgeroperationen der beiden Systeme beweisen. Dagegen kann es etwa im Fall der Buchstaben des lateinischen Alphabets keine solche Operation geben. Denn jedes Zeichenvorkommnis, auf welches das Prädikat ‚Buchstabe' zutrifft, muss per Definition typgleich zu einem Vorkommnis auf der Alphabetliste sein. Diese Überlegung zeigt also die Wahrheit der Aussage ‚Es gibt nur endlich viele Buchstaben'. Und das Zählen der Vorkommnisse auf der Alphabetliste zeigt dann die Wahrheit der Aussage ‚Es gibt genau 26 Buchstaben'.

Ob ein syntaktisches Prädikat ‚F' endlich oder unendlich ist, wird also weder dadurch festgestellt, dass in Raum und Zeit nach entsprechenden Vorkommnissen gesucht wird, noch dadurch, dass in einer abstrakten Wirklichkeit nach entsprechenden Zeichentypen gesucht wird. Aussagen dieser Art werden vielmehr analytisch – also durch eine Reflektion auf die Verwendung von ‚F' – verifiziert, indem gegebenenfalls eine syntaktische Operation ermittelt wird, unter deren Anwendung das Zutreffen von ‚F' in geeigneter Weise invariant ist. Diese Invarianzbeziehung kann wiederum als eine logische Beziehung zwischen zwei Prädikaten verstanden werden; nämlich zwischen ‚F' einerseits und dem Prädikat, welches Vorkommnisse als das Resultat der Anwendung der fraglichen Operation beschreibt andererseits. In diesem Sinn kann etwa die für den Unendlichkeitsbeweis des Strichziffernsystems relevante Beziehung zwischen dem Prädikat ‚Strichziffer' und der allgemeinen – also auf endliche viele Zeichen anwendbaren – Operation der Konkatenation wie folgt dargestellt werden: Wenn gilt, dass ‚Strichziffer' auf die paarweise typungleichen Zeichenvorkommnisse $x_1,...,x_n$ zutrifft, und dass ‚Konkatenation' auf x_{n+1} und $x_1,...,x_n$ zutrifft, dann gilt, dass ‚typungleich' auf x_{n+1} und x_i zutrifft, und dass ‚Strichziffer' auf x_{n+1} zutrifft.

Syntaktische Unendlichkeitsaussagen sind also Aussagen über die *Logik* des fraglichen Zeichenprädikats, welche die Existenz einer zu diesem Prädikat invarianten Zeichenrelation behaupten. Daher ergeben sich aus Aussagen dieser Art entsprechende Folgen für die empirischen Aussagen über Zeichenvorkommnisse. So bestimmt etwa die Wahrheit von ‚Es gibt unendlich viele Strichziffern', dass die Aussage ‚An der Tafel stehen alle Ziffern' kontradiktorisch ist, und dass Aussagen der Form ‚An der Tafel stehen n verschiedene Ziffern' synthetisch sind. Im Gegensatz dazu bestimmt etwa die Wahrheit der Aussage ‚Es gibt genau 26 Buchstaben', dass ‚An der Tafel stehen alle Buchstaben' synthetisch ist, und dass ‚An der Tafel stehen 27 verschiedene Buchstaben' kontradiktorisch ist.

6.3 Die in diesem Abschnitt zu diskutierende Verwendung von arithmetischen *Nachfolgeraussagen* sei zunächst durch eine Erinnerung an die Verwendung von Aussagen der *Alphabetsprache* eingeleitet. Wie in Abschnitt 1.8 bestimmt, werde eine elementare Alphabetaussage der Form ‚α folgt auf β' durch die Prüfung verifiziert, ob auf der Alphabetliste das zu β typgleiche

Vorkommnis unmittelbar vor dem zu α typgleichen Vorkommnis steht. Damit ist der Wahrheitswert einer solchen Aussage allein davon abhängig, ob das syntaktische Prädikat ‚folgt auf' auf die in der Aussage enthaltenen Buchstaben anwendbar ist. Aus diesem Grund kann eine verifikationsadäquate Wahrheitsbedingungsangabe für Alphabetaussagen keine Regeln für die Verwendung der Buchstaben umfassen. Insbesondere sind keine Bezugsregeln für die Anwendung der Buchstaben auf Gegenstände zu spezifizieren, da eine solche Anwendung nicht Teil der Verwendung von Alphabetaussagen ist. Es müssen vielmehr nur die Zutreffensbedingungen für den Relationsausdruck ‚folgt auf' angegeben werden. Und eine Bedingungsangabe dieser Art muss spezifizieren, wann ‚folgt auf' auf Buchstabenpaare anwendbar ist, und nicht etwa, wann ‚folgt auf' auf Gegenstände anwendbar ist, auf welche die Buchstaben sich vermeintlich beziehen. Angaben dieser Art bestimmen dann im Prinzip auch die hinweisende Verwendung von ‚folgt auf', d.h. also die Verwendung von demonstrativen Aussagen der Form ‚Dies folgt auf jenes' beim Zeigen auf zwei Buchstabenvorkommnisse. Und die Beziehung zwischen Aussagen dieser Art und den elementaren Alphabetaussagen der Form ‚α folgt auf β' kann wieder so verstanden werden, dass Letztere die Buchstabenvorkommnisse als Teilausdrücke enthalten, auf welche im Rahmen der Verwendung Ersterer durch entsprechende Gesten hingewiesen wird.

Arithmetische Nachfolgeraussagen in der Art von ‚Auf 12 folgt 13' werden kaum tatsächlich verwendet. Wenn doch, dann besteht der Verwendungszweck solcher Aussagen darin, spezifische Regeln des (intransitiven oder transitiven) Zählens zu kodifizieren. So könnte etwa ‚Auf 12 folgt 13' geäußert werden, um jemanden zu erklären, dass beim Zählen von ‚12' zu ‚13' überzugehen ist, oder um einen entsprechenden Zählfehler zu kritisieren. In Kontexten dieser Art ist die Wahrheit einer Nachfolgeraussage offenbar *syntaktisch* zu verstehen. Das heißt, dass eine solche Aussagen genau dann wahr ist, wenn das in ihr enthaltene Ziffernpaar der Zählregel des entsprechenden Ziffernsystems genügt. Denn die Verifikation einer Aussage wie etwa ‚Auf 12 folgt 13' – wenn man in diesem elementaren Fall schon von einer Verifikation sprechen will – würde sich eben derart gestalten, dass man überprüft, ob man der Zählregel folgt, wenn man von der einen Ziffer zur Anderen übergeht.

Wenn auf *Verifikationsadäquatheit* abgezielt wird, so sind die Wahrheitsbedingungen von Nachfolgeraussagen also in analoger Weise anzugeben wie die Wahrheitsbedingungen der Alphabetaussagen. Das bedeutet, dass keinerlei Regeln für die Verwendung der Ziffern und damit insbesondere keine *Bezugsregeln* für deren Anwendung auf Gegenstände anzugeben sind. Denn eine Praxis des Anwendens von Ziffern auf (einzelne) Gegenstände ist nicht Teil der Verwendung dieser Aussagen. Anzugeben ist vielmehr nur die *Zählregel* des Ziffernsystems, welche bestimmt, wann der Ausdruck der Nachfolgerrelation auf ein Ziffernpaar zutrifft. Und eine Angabe dieser Zutreffensbedingungen kann dann wiederum als Wahrheitsbedingungsangabe entsprechender demonstrativer Aussagen der Form ‚Auf dies folgt jenes' verstanden werden. Steht z.B. ‚S_S' für die Nachfolgerbeziehung im Strichsystem, dann heißt ‚S_S' zu verstehen, demnach, zu wissen, wann ‚S_S' auf zwei beliebige Strichziffern zutrifft. Und dies zu wissen, ist bereits gleichbedeutend damit, zu wissen, wie eine beliebige Nachfolgeraussage verifiziert wird.

Das bedeutet, dass alles, was an einer Nachfolgeraussage verstanden oder missverstanden werden kann, der Ausdruck der Nachfolgerrelation ist. Die Ziffern leisten insofern keinen echten Wahrheitsbedingungsbeitrag zu Nachfolgeraussagen, als die Wahrheitswerte dieser Aussagen nur von der *Form* der in ihnen enthaltenen Ziffern abhängen, und nicht etwa davon, worauf diese Ziffern sich *beziehen*. Man könnte also sagen, dass die Ziffern in diesem Kontext nicht Darstellendes, sondern Dargestelltes sind. Dass das Verstehen von ‚S_S' gleichbedeutend mit dem Wissen ist, wie beliebige Strichnachfolgeraussagen verifiziert werden, impliziert ebenfalls, dass eine Strichnachfolgeraussage zu verstehen, gleichbedeutend damit ist, alle Strichfolgeraussagen zu verstehen. Man kann also nicht etwa sagen, jemand verstehe zwar ‚S_S(I,II)', aber nicht ‚S_S(II,III)', weil er zwar wisse, was ‚S_S', ‚I' und ‚II' bedeuten, jedoch nicht, was ‚III' bedeutet. Denn das Verstehen beider Aussagen reduziert sich auf das Verstehen von ‚S_S'.

Da Zählregeln *systemrelativ* sind, variieren auch die Zutreffensbedingungen für den Ausdruck der Nachfolgerrelation von einem Ziffernsystem zum Anderen. Aus diesem Grund ist auch die Bedeutung solcher Ausdrücke systemrelativ. So ist etwa die Bedeutung von ‚S_S' durch die Bestimmung zu erklären:

‚S_S' trifft auf zwei Strichziffern x und y zu ⇔ x ist die Konkatenation aus y und ‚I'

Dagegen ist die Nachfolgerrelation im Dezimalsystem, welche im Folgenden durch ‚S_D' ausgedrückt sei, durch die in Kapitel 4.2 dargestellte Zähleregel des Dezimalsystems zu erklären. Es gibt also nicht so etwas wie *die eine* Nachfolgerrelation, sondern nur Nachfolgerrelationen verschiedener Systeme.

Das einem Ziffernsystem entsprechende System von Nachfolgeraussagen sei im Folgenden auch als *Nachfolgerkalkül* bezeichnet. Und allgemeiner sei ein System syntaktischer Aussagen – also ein System von Aussagen, deren Wahrheitswerte nur von syntaktischen Merkmalen bestimmter ihrer Teilausdrücke abhängen – als *Kalkül* bezeichnet. Durch eine wechselseitige Zuordnung der Ziffern zweier Ziffernsysteme lassen sich auch die Aussagen der entsprechenden Nachfolgerkalküle einander zuordnen. Angenommen etwa, die Ziffern des Strichsystems werden denen des Dezimalsystems nach der wie folgt definierten Regel f zugeordnet:

f(‚I')=‚1' und

$f(x_2,y_2)$, falls $f(x_1)=y_1$ sowie $S_S(x_1,x_2)$ und $S_D(y_1,y_2)$.

In diesem Fall gilt die folgende Äquivalenzregel für die Nachfolgeraussagen beider Systeme, welche f als eine Isomorphie zwischen diesen beiden Systemen bestimmt:

$S_S(x_1,x_2)$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $S_D(f(x_1),f(x_2))$ ist wahr

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die Isomorphie f *keine* Übersetzungsregel darstellt; also keine Regel, welche Ausdrücke mit gleicher *Bedeutung* aufeinander abbildet. Wie zuvor erläutert, haben Ziffern in Nachfolgeraussagen keine Bedeutung, so dass f also nicht als eine Übersetzungsregel für die Ziffern verstanden werden kann. Und ferner haben die Nachfolgerausdrücke ‚S_S' und ‚S_D' verschiedene Bedeutung, weil sie Zutreffensbedingungen haben und damit auf verschiedene Zeichen zutreffen. Obwohl also Nachfolgeraussagen des Strichsystems eine andere Bedeutung als Nachfolgeraussagen des Dezimalsystems haben, so haben die Aussagen beider Systeme dennoch eine analoge *Logik*. Wie unmittelbar zu zeigen sein wird, können die fraglichen logischen Gesetze durch die sogenannten Peano-Axiome (in materialer Weise) formuliert werden. Nachfolgerkalküle, in welchen die durch diese Axiome kodifizierten logischen Regeln gelten, sollen im Folgenden auch als *Progressionskalküle* bezeichnet werden.

Wie zuvor erläutert, sind die Nachfolgeraussagen beider Systeme – also des Dezimal- und des Strichsystems – durch die jeweiligen Zählregeln definiert. Aus diesem Grund ist jede Nachfolgeraussage kontradiktorisch, welche eine der *Startziffern* des Zählens als Nachfolger einer anderen Ziffer darstellt. In diesem Sinn ist also etwa jede Strichnachfolgeraussage der Form ‚S_S(x,I)' kontradiktorisch, da ‚I' die Startziffer im Strichsystem ist. Und analog hierzu ist, da ‚0' die Startziffer des Dezimalsystems ist, jede Dezimalnachfolgeraussage der Form ‚S_D(x,0)' kontradiktorisch. Gleichbedeutend damit ist, dass Fragen nach den Nachfolgern von ‚I' oder ‚0' als unbeantwortbar ausgeschlossen werden können.

Indem von der Rede von Ziffern zur Rede von Zahlen übergegangen wird, kann das Kalkülmerkmal der Existenz eines solchen Startzeichens – also einer Nullziffer, die auf keine andere Ziffer folgt – durch das folgende Peano-Axiom material formuliert werden:

(PA_1) *Es gibt genau eine natürliche Zahl, Null, die nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist.*

Es ist zu bemerken, dass ‚a' – also der erste Buchstabe des Alphabets – im Rahmen der Alphabetaussagen den Status eines Startzeichens hat, so dass also auch der entsprechende Alphabetkalkül (PA_1) genügt. Erst wenn dieser Kalkül durch die zusätzlich Festlegung modifiziert würde, dass ‚a' auf ‚z' folgt, hätte weder ‚a', noch sonst ein Buchstabe den Status eines Startzeichens.

Sowohl im Strichsystem als auch im Dezimalsystem ist das Zählen insofern *unbeschränkt fortsetzbar*, als die jeweiligen Zählregeln für beliebige Ziffern bestimmen, wie die jeweils nächste Ziffer zu konstruieren ist. Anders als im Alphabetkalkül, in welchem kein Zeichen auf ‚z' folgt, ist es also für jede Strichziffer und für jede Dezimalziffer logisch möglich, eine folgende Ziffer zu finden bzw. zu konstruieren. Die hierzu äquivalente Regel, wonach die Frage nach einem Nachfolger relativ zu jeder gegebenen Ziffer beantwortbar ist, lässt sich durch das folgende Peano-Axiom material formulieren:

(PA_2) *Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.*

Die Nachfolgerrelationen des Strichsystems und Dezimalsystems sind *typeindeutig*. Äquivalent hierzu ist die Regel, dass in beiden Kalkülen von zwei typungleichen Antworten auf eine Nachfolgerfrage jeweils höchstens eine korrekt sein kann. Aus diesem Grund ist es zulässig, die Nachfolgeraussagen beider Systeme durch den Gebrauch des Gleichheitszeichens – also in der Form ‚$S_D(x)=y$' bzw. ‚$S_S(x)=y$' – zu notieren. Die fragliche Eindeutigkeitsregel kann durch das folgende Peano-Axiom material formuliert werden:

(PA_3) *Jede natürliche Zahl hat höchstens einen Nachfolger.*

Die Geltung der Axiome (PA_1)-(PA_3) in einem Nachfolgerkalkül impliziert die Unendlichkeit des zugrunde liegenden Ziffernsystems. Wie im Abschnitt zuvor bereits erläutert wurde, ist die Rede von Unendlichkeit eines Zeichensystems insofern ontologisch unproblematisch, als hiermit nicht mehr gemeint ist, als dass es relativ zu jeder gegebener Menge von Zeichen des fraglichen Systems sinnvoll ist, von weiteren Zeichen dieses System zu sprechen. Es ist hierbei also kein Bezug auf abstrakte Gegenstände unterstellt.

Aus den Definitionen der Nachfolgerrelation des Strichsystems und des Dezimalsystems ist ersichtlich, dass, von den Startziffern ‚0' bzw. ‚I' abgesehen, jede Strichziffer und jede Dezimalziffer Nachfolger einer Strich- bzw. einer Dezimalziffer ist. Diese Regel kann zwar nicht durch das sogenannten Induktionsaxiom, dessen Sinn im nächsten Kapitel noch zu diskutieren sein wird, jedoch durch das folgende, verwandte Axiom formuliert werden:

(PA_4) *Abgesehen von der Null folgt jede natürliche Zahl auf eine natürliche Zahl.*

Als vorläufiges Fazit der Diskussion der Peano-Axiome kann also festgehalten werden, dass diese Axiome zur Kodifikationen logischer Regeln verwendet werden können, durch deren Geltung sich verschiedene Kalküle voneinander unterscheiden. In diesem Sinn unterscheiden sich etwa der Strich- und der Dezimalkalkül insofern vom Alphabetkalkül, als in letzteren (PA_2) nicht gilt und Nachfolgerfragen daher nicht in jedem Fall beantwortbar sind. Die Frage, ob die Peano-Axiome *auch* als Aussagen über bestimmte Gegenstände interpretiert werden können, soll in Kapitel 8 untersucht werden.

6.4 In diesem Abschnitt soll zunächst gezeigt werden, dass die *arithmetischen Operationszeichen* ebenso wie der Ausdruck der Nachfolgerrelation als *syntaktische Relationsausdrücke* aufzufassen sind, welche Ziffern eines bestimmten Systems klassifizieren. Genau wie Nachfolgeraussagen sind damit auch arithmetische Gleichungen syntaktische Aussagen. Auf dieser Grundlage soll dann untersucht werden, inwiefern die nominalistische These berechtigt ist, wonach die Arithmetik von Ziffern handelt.

Es sei zunächst die Verwendung von einfachen *Additionsaussagen* im Strichsystem und im Dezimalsystem untersucht. Hierbei seien die Summenzeichen beider Systeme wieder durch einen entsprechenden Index unterschieden, so dass also ‚$+_D$' für die Summe Dezimalsystem und ‚$+_S$' für die Summe im Strichsystem steht. Im Alltag werden Additionssätze im Dezimalsystem in den allermeisten Fällen durch das bekannte schriftliche Verfahren verifiziert. Da eine Verifikation dieser Art in der Transformation von Dezimalziffern nach bestimmten syntaktischen Regeln besteht, ist ‚$+_D$' in diesen Zusammenhängen als ein *systemrelativer, syntaktischer Relationsausdruck* aufzufassen. In analoger Weise könnte das Additionszeichen ‚$+_S$' der im Alltag ungebräuchlichen Strichnotation durch die Bestimmung definiert werden, dass eine entsprechende Additionsgleichung ‚$x+_Sy=z$' genau dann wahr ist, wenn ‚z' die Konkatenation aus ‚x' und ‚y' ist. Bei Zugrundelegung dieser Verifikationsmethoden besteht die Verifikation einer Additionsgleichung sowohl im Dezimalsystem als auch im Strichsystem darin, aus den beiden links des Gleichheitszeichens stehenden Ziffern nach bestimmten syntaktischen Regel eine dritte Ziffer zu *konstruieren*. Dabei gilt die Gleichung genau dann als wahr, wenn die hierbei konstruierte Ziffer identisch – d.h. genauer: typgleich – mit der rechts des Gleichheitszeichens stehenden Ziffer ist. Die in dieser Weise verwendeten Additionsgleichungen beider Systeme sind demnach syntaktische Aussagen, welche das Bestehen einer durch eine entsprechende Zeichenkonstruktion nachzuweisenden syntaktischen Beziehung zwischen denjenigen Ziffern behaupten, welche in den fraglichen Gleichungen vorkommen.

Bei den beiden durch die entsprechenden Konstruktionsregeln definierten Additionszeichen handelt es sich folglich um dreistellige syntaktische Relationszeichen. So stellt insbesondere ‚$+_S$‘ im Prinzip die Einschränkung der dreistelligen Konkatenationsrelation auf Strichziffern dar. Aus diesem Grund sind ‚$+_S$‘ und ‚$+_D$‘ nicht nur in Gleichungen verwendbar, in denen sie auf die in diesen Aussagen angegebenen Ziffern angewendet werden. Ebenso wie schon die entsprechenden Nachfolgerzeichen können die beiden Additionszeichen grundsätzlich auch innerhalb demonstrativer Aussagen verwendet werden. Eine solche Verwendung von ‚$+_S$‘ bestünde z.B. darin, die demonstrative Aussage ‚II$+_S$III ergibt das‘ beim Zeigen auf ein zu ‚IIIII‘ typgleiches Zeichenvorkommnis zu äußern.

Die übliche axiomatische Definition der Addition lässt sich durch das folgende, systemvariable Rekursionsschema darstellen:

$$a+e = a$$
$$a+Sn = S(a+n)$$

Hierbei stehen ‚a‘ und ‚n‘ für Ziffern eines *beliebigen* Progressionskalküls, ‚S‘ für den entsprechenden Nachfolgerausdruck und ‚e’ für die jeweilige Startziffer. Der Einfachheit halber soll im Folgenden angenommen werden, dass das Strichsystem um die Dezimalziffer ‚0‘ als Startziffer ergänzt sei, so dass also nun im Strichsystem in der folgenden Weise gezählt werde: 0, I, II, etc..

Anhand der Dezimaladditionsgleichung ‚$2+_D3=5$‘ sowie der Strichadditionsgleichung ‚II$+_S$III=IIIII‘ soll nun gezeigt werden, wie sich die durch das obige Rekursionsschema kodifizierten Verifikationsmethoden für Additionsaussagen dieser beiden Systeme gestalten. Auch wenn die entsprechende Verifikationsregel von Dezimaladditionsgleichungen im Alltag nicht tatsächlich befolgt wird, besteht die theoretische Wichtigkeit der entsprechenden Definition unter anderem darin, dass sie durch den ausdrücklichen Bezug auf die Nachfolgerrelation den *logischen Zusammenhang* zwischen dem Begriff der *Summe* und dem des *Nachfolgers* darstellt.

Die der rekursiven Definition folgende Verifikation einer Additionsgleichung kann in drei Schritte – oder besser vielleicht: Etappen – unterteilt werden. Im ersten Schritt wird der zweite Summand entsprechend der Zählregel des jeweiligen Systems sukzessiv in einen durch die jeweilige Nullziffer gebildeten Nachfolgerterm *umgeformt*. Im Fall der beiden Beispielaussagen stellt sich dieser Schritt also folgendermaßen dar:

$2+_D3 = 2+_DS_D(2)$ $\qquad$ $II+_SIII = II+_SS_S(II)$

$2+_DS_D(2) = 2+_DS_D(S_D(1))$ $\qquad$ $II+_SS_S(II) = II+_SS_S(S_S(I))$

$2+_DS_D(S_D(1)) = 2+_DS_D(S_D(S_D(0)))$ $\qquad$ $II+_SS_S(S_S(I)) = II+_SS_S(S_S(S_S(0)))$

Auf die rekursive Definition wird erst im *zweiten Verifikationsschritt* Bezug genommen. Dies indem durch die sukzessive Anwendung der zweiten Formel und die einfache Anwendung der ersten Formel des Rekursionsschemas das Additionszeichen zugunsten einer bestimmten Anzahl Nachfolgerzeichen *eliminiert* wird. Am Beispiel:

$2+_DS_D(S_D(S_D(0))) = S_D(2+_DS_D(S_D(0)))$ $\qquad$ $II+_SS_S(S_S(S_S(0))) = S_S(II+_SS_S(S_S(0)))$

$S_D(2+_DS_D(S_D(0))) = S_D(S_D(2+_DS_D(0)))$ $\qquad$ $S_S(II+_SS_S(S_S(0))) = S_S(S_S(II+_SS_S(0)))$

$S_D(S_D(2+_DS_D(0))) = S_D(S_D(S_D(2+_D0)))$ $\qquad$ $S_S(S_S(II+_SS_S(0))) = S_S(S_S(S_S(II+_S0)))$

$S_D(S_D(S_D(2+_D0))) = S_D(S_D(S_D(2)))$ $\qquad$ $S_S(S_S(S_S(II+_S0))) = S_S(S_S(S_S(2)))$

Im *dritten* und letzten Schritt wird dann wieder allein durch das Befolgen der Zählregel des jeweiligen Systems der Nachfolgerterm sukzessive in eine entsprechende Ziffer *umgeformt*. In den beiden Beispielfällen gestalten sich diese Umformungen genauer wie folgt:

$S_D(S_D(S_D(2))) = S_D(S_D(3))$ $\qquad$ $S_S(S_S(S_S(II))) = S_S(S_S(III))$

$S_D(S_D(3)) = S_D(4)$ $\qquad$ $S_S(S_S(III)) = S_S(IIII)$

$S_D(4) = 5$ $\qquad$ $S_S(IIII) = IIIII$

Offenbar sind auch bei der Zugrundelegung dieser Verifikationsmethoden die Additionsgleichungen verschiedener Systeme jeweils als *syntaktische* Aussagen aufzufassen. Denn auch die Befolgung dieser Methoden besteht darin, aus den zwei auf der rechten Gleichungsseite gegebenen Ziffern eine Ziffer zu konstruieren, welche dann mit der auf den linken Seite der Gleichungen stehenden Ziffer verglichen wird.

Wie soeben erläutert, besteht die Rolle des Rekursionsschemas hierbei darin, eine Regel für die *Eliminierung* eines Additionszeichens zugunsten entsprechender Nachfolgerzeichen zu kodifizieren. Da also Anwendungen dieser Regel Additionsaussagen eines bestimmten Systems in (komplexe) Nachfolgeraussagen desselben Systems überführen, stellt das Rekursionsschema den grundlegenden logischen Zusammenhang zwischen Additionsgleichungen und Nachfolgeraussagen dar.

Obwohl dieser Zusammenhang für die verschiedenen Systeme (bzw. Progressionskalküle) somit einheitlicher Art ist, ist die Bedeutung der verschiedenen Additionszeichen wegen der systemrelativen Bedeutungen der entsprechenden Nachfolgerzeichen ihrerseits systemrelativ. So treffen etwa ‚$+_S$‘ und ‚$+_D$‘ weiterhin nur auf Ziffern ihrer jeweiligen Systeme zu. Es ist also festzuhalten, dass auch das systemvariable Rekursionsschema keinen einheitlichen Additionsbegriff liefert. Die Additionszeichen der verschiedenen Systeme stehen nicht für einen Begriff der Addition. Sie stehen vielmehr für verschiedene Additionsbegriffe, welche jeweils in derselben Weise auf entsprechende Nachfolgerbegriffe bezogen sind. Und wie dem Rekursionsschema zu entnehmen ist, kann diese Beziehung in der folgenden Weise ausgedrückt werden: die Addition mit dem Summanden n entspricht der n-fachen Anwendung der Nachfolgeroperation. Besonders deutlich wird dieser Zusammenhang zwischen der Addition und Nachfolgerrelation, wenn das Rekursionsschema in der folgenden Weise zur sukzessiven Erzeugung einer Reihe von n+1 Additionsgleichungen verwendet wird:

$$
\begin{aligned}
&2+_D0 = 2\\
&2+_D1 = 2+_DS_D(0) = S_D(2+_D0) = S_D(2) = 3\\
&2+_D2 = 2+_DS_D(1) = S_D(2+_D1) = S_D(3) = 4\\
&2+_D3 = 2+_DS_D(2) = S_D(2+_D2) = S_D(3) = 5
\end{aligned}
$$

Diese Verifikationsmethode, welche auch als Abzählmethode bezeichnet werden kann, lässt sich ferner in der folgenden Weise vereinfachen:

$$
\begin{array}{ll}
2+_D0 = 2 & 0 \ldots 2\\
2+_D1 = 3 & 1 \ldots 3\\
2+_D2 = 4 & 2 \ldots 4\\
2+_D3 = 5 & 3 \ldots 5
\end{array}
$$

Operational gesprochen besteht also das Addieren von n zu a darin, bei a anfangend n-mal weiterzuzählen.

Die soeben dargestellten Analysen ließen sich ebenfalls auf die anderen arithmetischen Grundoperationen – also auf die *Multiplikation* und die *Potenzierung* – übertragen. Auch bei diesen Zeichen handelt es sich um syntaktische und systemrelative Relationsausdrücke, deren rekursiven Definitionen zeigen, wie sie zugunsten anderer Operationszeichen und letztlich zugunsten einer bestimmten Anzahl von Nachfolgerzeichen eliminiert werden können. Somit bestimmen diese Eliminierungsregeln – gemeinsam mit der die Nachfolgeroperation definierenden systemrelativen Zähleregel –, wie man aus zwei gegebenen Ziffern eine Dritte konstruiert. Und eine entsprechende Gleichung behauptet, dass die Befolgung der Eliminierungsregeln sowie der Zählregel von zwei gegeben Ziffern einer dritten Ziffer führt.

Die Eliminierungsregeln der verschiedenen Operationszeichen sowie die Regeln für die Verwendung von Klammern bestimmen somit ebenfalls, wie aus einem *komplexen arithmetischen Term* – also einem Term, der aus *mehreren* Operationszeichen gebildet ist – eine entsprechende *Ziffer* zu konstruieren ist. Hierbei bestimmen die Klammern die Reihenfolge, in der die Operationszeichen aus den Term zu eliminieren sind. Eine arithmetische Gleichung, die aus einem komplexen Term und einer Ziffer gebildet ist, behauptet, dass die Ziffer aus dem Term konstruierbar ist. Und eine aus zwei komplexen Termen gebildete arithmetische Gleichung behauptet, dass die Umformungen beider Terme zu derselben Ziffer führen. Die Verifikation arithmetischer Gleichungen besteht also ganz allgemein darin, arithmetische Terme nach bestimmten syntaktischen Regeln in Ziffern umzuformen (vgl. hierzu auch Tait 1986, S. 357 ff.).

Wenn man darauf abzielt, die Verwendung arithmetischer Gleichungen in verifikationsakkurater Weise zu charakterisieren, dann muss man also sagen, dass der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung – ganz gleich, welchen Systems – nur von der Anwendbarkeit der arithmetischen Operationszeichen auf bestimmte Ziffern abhängt. Denn das ist es, was festgestellt wird, wann immer festgestellt wird, ob eine solche Gleichung wahr ist. Der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung ist somit eines ihrer syntaktischen Merkmale. Deshalb kann *Wahrheit* im Fall arithmetischer Gleichungen als eine spezielle Art der *Wohlgeformtheit* aufgefasst werden. Insofern der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung nicht davon abhängt, worauf die Ziffern anwendbar sind, sondern davon, ob andere Ausdrücke auf die Ziffern anwendbar sind, sind Ziffern in diesen Gleichungen *Dargestelltes* und nicht Darstellendes. Die Ziffern haben in diesem Kontext insofern keine Bedeutung, als sie keinen Beitrag zu den Wahrheitsbedingungen arithmetischer Gleichungen leisten. Insbesondere knüpfen die Ziffern die Wahrheitswerte arithmetischer Gleichungen nicht an die Beschaffenheit irgendwelcher Bezugsgegenstände. Denn eine Prüfung der Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars auf solche Gegenstände ist nicht Teil tatsächlichen Verifikationspraxis arithmetischer Gleichungen.

Es soll nun zuletzt gezeigt werden, dass – und inwiefern – bei dieser Verwendung arithmetischer Gleichungen die nominalistische Charakterisierung des Inhalts arithmetischer Gleichungen zutrifft, wonach diese von Ziffern und nicht von abstrakten Gegenständen handeln. Eine Schwierigkeit hierbei besteht natürlich darin, dass nicht ohne weiteres klar ist, wie die Rede vom *Inhalt* einer Aussage bzw. die Rede davon, wovon eine Aussage *handelt*, genau zu verstehen ist. So sind arithmetische Gleichungen, wenn sie in der soeben dargestellten Weise verwendet werden, einerseits in dem Sinn *inhaltslos*, dass ihre Wahrheitswerte nicht von irgendwelchen

Gegenständen abhängen, auf welche die in der Aussage enthaltenen Ziffern sich beziehen. Andererseits könnte man jedoch auch sagen, dass der Inhalt arithmetischer Gleichungen syntaktischer Art sei, insofern der Wahrheitswert einer solchen Aussage davon abhängt, ob die in ihr vorkommenden Ziffern in einer spezifischen syntaktischen Beziehung zueinander stehen.

Wird die Rede vom Inhalt einer Aussage in dieser Weise verstanden, so muss man sagen, dass arithmetische Gleichungen von Ziffern handeln, und nicht von Gegenständen, auf welche die Ziffern sich vermeintlich beziehen. Unter Rückgriff auf die Rede von Zeichenvorkommnissen und Zeichentypen kann diese Charakterisierung ferner wie folgt präzisiert werden. Eine arithmetische Gleichung handelt insofern von konkreten Ziffernvorkommnissen, als ihre Verifikation anhand der Betrachtung konkreter Ziffernvorkommnisse erfolgt. In diesem Sinn wird etwa eine Nachfolgeraussage durch die Prüfung verifiziert, ob die beiden in ihr enthalten Ziffernvorkommnisse der Zählregel des Ziffernsystems genügen. Andererseits handelt eine arithmetische Gleichung insofern von Zifferntypen, als alle arithmetischen Operationszeichen typkongruent sind. So stellt man etwa durch die Feststellung, dass zwei gegebene Ziffernvorkommnisse einer bestimmten Zählregel genügen, ebenfalls fest, dass alle zu diesen Ziffernvorkommnissen typgleichen Ziffernpaare der fraglichen Zählregel genügen. Und wie die Überlegungen aus Abschnitt 6.2 zeigen, ist auch die in der nominalistischen Charakterisierung der Verwendung arithmetischer Gleichungen enthaltene Entgegensetzung von Zeichen und abstrakten Gegenständen berechtigt. Denn die Rede davon, dass z.B. eine Nachfolgeraussage nicht von Ziffernvorkommnissen, sondern von Zifferntypen handelt, ist nicht so zu verstehen, dass die fragliche Aussage anstatt von den in ihr enthaltenen Ziffernvorkommnissen von irgendwelchen Gegenständen anderer Art handelt. Gemeint sein kann vielmehr nur, dass eine Nachfolgeraussage in anderer Weise von den in ihre enthaltenen Ziffernvorkommnissen handelt, als etwa eine Aussage über die Größe oder die Schriftart dieser Ziffernvorkommnisse, insofern das auf die Ziffernvorkommnisse angewendete Nachfolgerrelationszeichen typkongruent ist.

Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass die hier geschilderte Auffassung vom Inhalt arithmetischer Gleichungen im Einklang mit Wittgenstein diesbezüglichen Bemerkungen in PG steht. Nach Wittgenstein ist die Arithmetik ein Kalkül und handle *darum* von nichts (PG, II §11). Sie *handle* auch nicht von Zeichen; sie *operiere* mit ihnen (PG, II §19). Die Entgegensetzung vom Handeln von Zeichen einerseits und vom Operieren mit ihnen andererseits, welche auf Wittgensteins frühere Unterscheidung zwischen *Funktion* und *Operation* zurückführt (vgl. hierzu z.B. WWK, S. 215 ff), entspricht in der hier verwendetet Terminologie in etwa der Unterscheidung zwischen *materialen* und *syntaktischen* Eigenschaften. Daher ist auch Wittgensteins Charakterisierung des Inhalts arithmetischer Gleichungen dahingehend zu verstehen, dass in der

Arithmetik nicht die materialen, sondern lediglich die syntaktischen Eigenschaften von Zeichenvorkommnissen relevant sind.

Nachdem im nächsten Kapitel zunächst noch die Semantik arithmetischer Gesetze untersuchen werden soll, wird dann, in Kapitel 8, noch einmal auf arithmetische Gleichungen zurückzukommen sein. An dieser Stelle soll dann die Möglichkeit materialer Konzeptionen der Arithmetik untersucht werden, also von Konzeptionen, die durch die Angabe entsprechender Bezugs- und Zutreffensregeln eine Anwendung des arithmetischen Vokabulars auf Gegenstände konstruieren.

6.5 In ihrem programmatischen Aufsatz *Constructive Nominalism* haben Quine und Goodman ebenfalls eine nominalistische Konzeption der Arithmetik vorgeschlagen. Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, soll in diesem Abschnitt in knapper Weise dargestellt werden, inwiefern die hier dargestellte Position von derjenigen Quines und Goodmans abweicht.

Als *Motiv* für die Entwicklung ihrer Konzeption der Arithmetik geben Quine und Goodman die folgende allgemeine ontologische These an, welche ihnen zu Folge letztlich nur durch Intuition zu begründenden sei (Goodman/Quine 1974, S. 105):

(P_1) Es gibt keine abstrakten Gegenstände.

Aus dieser These leiten Quine und Goodman die folgende semantische Charakterisierung von Aussagen ab, welche von abstrakten Gegenständen zu handeln scheinen (S. 122):

(P_2) Aussagen, die scheinbar von abstrakten Gegenständen handeln, sind entweder *sinnlos*, oder aber durch Aussagen *paraphrasierbar*, die nur von konkreten Gegenständen handeln.

Da sich konkrete Paraphrasen arithmetischer Gleichungen nicht ohne weiteres finden zu lassen scheinen, schließen Quine und Goodman (S. 111):

(P_3) Eine arithmetische Gleichung ‚$T_1=T_2$‘ hat keine Bedeutung und folglich auch keinen Wahrheitswert.

Bedeutung und Wahrheitswerte, so Quine und Goodman, haben nur diejenigen syntaktischen Aussagen, welche behaupten, dass bestimmte arithmetische Aussagen Theoreme sind. Diese Auffassung, wonach also nicht die Gleichung ‚$T_1=T_2$‘, sondern nur die entsprechende syntaktische Aussage „„$T_1=T_2$“ ist ein Theorem der Arithmetik‘ – oder kurz: „„$T_1=T_2$“ ist arithmetisch‘ – ‚wahr‘ oder ‚falsch‘ genannt werden könne, erläutern Quine und Goodman, indem sie arithmetische Sätze mit Abakusstellungen vergleichen. Auch in diesem Fall, so Quine und Goodman, seien es nicht die *Stellungen* selbst, sondern nur deren *Beschreibungen*, welche ‚wahr’ oder ‚falsch’ genannt werden können (S. 122).

Das Verhältnis zwischen Syntax und Arithmetik charakterisieren Quine und Goodman dann wie folgt (S. 111):

> (P_4) Obwohl die syntaktische Aussage „„$T_1=T_2$“ ist arithmetisch‘ keine Paraphrase der arithmetischen Aussage ‚$T_1=T_2$‘ ist, so ist doch die Übereinstimmung der Mathematiker in Hinblick auf ihre Methoden und Resultate auf die für die arithmetischen Zeichen geltenden syntaktischen Regeln zurückzuführen.

Quine und Goodman stellen dann korrekter Weise fest, dass eine nominalistische Philosophie der Arithmetik nur dann konsequent ist, wenn gezeigt werden kann, dass auch die Rede von Zeichen nominalistisch – d.h. also ohne Bezug auf abstrakte Gegenstände – verstanden werden kann (S. 111). Da sie jedoch scheinbar der Auffassung sind, dass die Rede über Zeichen*typen* nur im platonistischen Sinn – d.h. also als Rede über abstrakte Gegenstände – zu verstehen sei, gehen sie davon aus, dass Aussagen über die Existenz und Anzahl von Zeichen nur dann sinnvoll sind, wenn hierbei die raumzeitliche Existenz bzw. die Anzahl von Zeichen*vorkommnissen* gemeint ist. Aus diesem Grund entsteht dann das in (1974) zwar bemerkte, jedoch nicht ausführlich diskutierte Unendlichkeitsproblem: einerseits scheint es nur endlich viele (konkrete) Gegenstände und also auch nur endlich viele Ziffernvorkommnisse zu geben; andererseits scheint die klassische Arithmetik die Existenz unendlich vieler Gegenstände vorauszusetzen (S. 106).

Es bietet sich an, die Schilderung der Abweichungen von der in den Abschnitten zuvor entwickelten Konzeption arithmetischer Gleichungen von der Konzeption Quines und Goodmans bei diesem letzten Punkt zu beginnen. Wie in Abschnitt 6.2 dargelegt wurde, sind auch Aussagen über Zeichen*typen* nominalistisch zu verstehen. Bei Aussagen dieser Art handelt es sich entweder um empirische (bzw. zeitliche) Aussagen über die Typgleichheit bzw. über Anzahlen typungleicher Vorkommnisse. Oder aber es handelt sich um zeitlose Aussagen über die Logik typkongruenter Zeichenprädikate. Auch die Rede von der Unendlichkeit von Zeichensystemen ist in diesem letzteren Sinn zu verstehen: dass es z.B. unendlich viele Strichziffern (bzw. Strichzifferntypen) gibt, bedeutet einfach, dass die Anwendung des Ausdruck ‚Strichziffer’ invariant unter einer bestimmten Operation – in diesem Fall der Konkatenation –

ist, deren Anwendung auf Strichziffernvorkommnisse stets zu von diesen Vorkommnissen typungleichen Strichziffernvorkommnissen führt.

Nun zu These P_4! Berechtigt und in Übereinstimmung mit den Überlegungen aus den vorangegangenen Abschnitten erscheint zunächst derjenige Teil dieser These, wonach die *Methoden* der Arithmetik syntaktischer Natur sind. Es erscheint dann jedoch nur konsequent anzunehmen, dass dies dann ebenfalls von denjenigen Aussagen gelten soll, welche die *Ergebnisse* der Anwendung dieser Methoden ausdrücken. Und das sind eben die arithmetischen Gleichungen. Konsequenter Weise müssten Quine und Goodman also sagen, dass die syntaktische Aussage „‚T_1=T_2" ist arithmetisch' doch eine Paraphrase der entsprechenden Gleichungen ‚T_1=T_2' ist. Denn da beide Aussagen in derselben Weise verifiziert werden, sagen sie auch dasselbe aus.[4]

Da somit ‚T_1=T_2' und „‚T_1=T_2" ist arithmetisch' denselben Inhalt und daher auch denselben Wahrheitswert haben, ist folglich auch P_3 abzulehnen. Hierbei ist überdies darauf hinzuweisen, dass auch eine Abakusstellung als eine Aussage verstanden werden kann, welche behauptet, dass sie durch das Befolgen bestimmter Verschieberegeln erreicht werden kann.[5] Das entsprechende Entscheidungsspiel würde sich dabei also derart gestalten, dass zunächst eine bestimmte Abakusstellung willkürlich hergestellt wird, um daraufhin festzustellen, ob sich diese Stellung auch durch das Befolgen bestimmter Verschieberegeln erreichen lässt. Ob Abakusstellungen ‚wahr' oder ‚falsch' genannt werden können, hängt also davon ab, ob sie – so wie die arithmetischen Gleichungen – in entsprechenden Behauptungsspielen verwendet werden.

Nun zuletzt zu Quines und Goodmans metaphysisch-ontologischer Motivation für ihre nominalistische Konzeption der Arithmetik! In diesem Zusammenhang ist zunächst zu bemerken, dass sich die in den Abschnitten 6.3 und 6.4 dargestellte nominalistische Konzeption arithmetischer Gleichungen ganz einfach aus der Untersuchung der Verifikationsregeln dieser Aussagen *ergab*. Diese Untersuchungen hatten nicht das Ziel, die Wahrheitsbedingungen arithmetischer Gleichungen derart anzugeben, dass bestimmte metaphysische Annahmen vermieden werden können. Das Ziel bestand lediglich darin, die Wahrheitsbedingungen dieser Aussage in *verifikationsadäquater* Weise anzugeben. Was nun Quines und Goodmans metaphysisch-ontologisches Motiv anbelangt, so ist darauf hinzuweisen, dass, bevor nach der Existenz abstrakter Gegenstände gefragt wird, zuerst die Frage nach der (intendierten) Bedeutung des Ausdrucks ‚abstrakter Gegenstand' gestellt werden sollte. Und das heißt: es muss die Verifikation derjenigen Aussagen untersucht werden, in denen dieser Ausdruck verwendet werden soll. Eine

[4] Dass Quine, obwohl er selbst eine verifikationistische Semantikkonzeption vertritt, nicht diese Konsequenz zieht, ist eventuell auf seinen Holismus zurückzuführen. Vgl. hierzu auch Glock 2003, S. 225-231.

[5] In BGM III §67 macht Wittgenstein eine analoge Bemerkung in Bezug auf das Schachspiel. Auch Schachstellungen können hiernach als *Aussagen* aufgefasst werden, die ihre eigene Konstruierbarkeit nach den Scharregeln behaupten.

solche Untersuchung ist im vorangegangenen Kapitel bereits durch gerührt worden und hat zu den folgenden Ergebnissen geführt. Wenn von abstrakten Gegenständen die Rede ist, so besteht die Abstraktheit hierbei in der *logisch-semantischen* – und nicht in der empirischen – Unmöglichkeit einer raumzeitlichen Lokalisierung. Eine Aussage der Form ‚a ist ein abstrakter Gegenstand' besagt, dass durch ‚a' gebildete Lokalisierungsaussagen – also etwa die demonstrative Aussage ‚Dies ist a' oder auch die Präsenzaussagen ‚a befindet sich bei (s,t)' – sinnlos sind. Denn ob eine solche Aussage wahr ist, wird festgestellt, indem geprüft wird, ob ‚a' sinnvoll in entsprechenden Kontexten verwendet werden kann. Folglich handelt es sich bei dem Ausdruck ‚abstrakter Gegenstand' um ein semantisches Prädikat, durch welches nicht Gegenstände nach ihren Eigenschaften, sondern Ausdrücke nach ihrer Verwendungsweise klassifiziert werden.

Diese semantische Analyse des Ausdrucks ‚abstrakter Gegenstand' ergibt somit, dass die grundlegende Kritik an platonistischen Positionen nicht metaphysisch-ontologischer, sondern gewissermaßen *instrumenteller* Art sein muss. Das, was mit Recht abgelehnt werden kann, ist, das geschilderte semantische Merkmal – also das sinnvolle Vorkommen in Lokalisierungsaussagen – durch den Gebrauch des Ausdrucks ‚abstrakter Gegenstand' auszudrücken. Denn wie in Kapitel 5.6 dargelegt wurde, ist diese Art der Formulierung in mehrerlei Hinsicht irreführend. Nicht nur, dass die Formulierung ‚a ist eine abstrakter Gegenstand' den Umstand verschleiert, dass durch diese Aussage der Ausdruck ‚a' und nicht ein Gegenstand, auf den ‚a' sich vermeintlich bezieht, klassifiziert wird. Ferner wird irriger Weise suggeriert, dass, falls ‚a ist ein abstrakter Gegenstand' wahr und also ‚a' nicht sinnvoll in Lokalisierungsaussagen einsetzbar ist, ‚a' dennoch eine analoge semantische Funktion hat wie ein Ausdruck, der sich auf einen raumzeitlichen Gegenstand bezieht und daher sinnvoll in Lokalisierungskontexten verwendet werden kann. Wenn Abstraktheit als Unlokalisierbarkeit im semantischen Sinn zu verstehen ist, dann sind – entgegen P_2 – nicht diejenigen Aussagen sinnlos sind, welche – wie etwa arithmetische Gleichungen – vermeintlich von abstrakten Gegenständen handeln. Sinnlos – oder zumindest unklar – ist zunächst nur die ontologische Existenzaussagen P_1 selbst. Und platonistischen Konzeptionen sollten dahingehend kritisiert werden, dass diejenigen Aussagen in irreführender Weise formuliert sind, welche behaupten, dass bestimmte Aussage von abstrakten Gegenständen handeln. Denn dass z.B. die Arithmetik von abstrakten Gegenständen handelt – oder auch: dass sie Existenz abstrakter Gegenstände voraussetzt –, kann bestenfalls so viel bedeuten: wenn ‚T' ein arithmetischer Term ist, dann sind Ausdrücke wie ‚Dies ist T' oder ‚T befindet sich bei (s,t)' sinnlos.

7. Arithmetische Gesetze

Die für den im folgenden Kapitel zu entwickelnden Beweis von Wittgensteins Autonomiethese relevante Hauptthese dieses Abschnitts lautet, dass auch die assertorische Verwendung arithmetische Gesetze durch syntaktische Regeln bestimmt und daher im nominalistischen Sinn zu charakterisieren ist. Hierfür soll in den ersten beiden Abschnitten zunächst gezeigt werden, dass algebraische und induktive Beweise algebraischer Gleichungen Regeln darstellen für die Konstruktion der arithmetischen Beweise derjenigen arithmetischen Gleichungen, welche durch die algebraische Gleichung schematisiert werden. In Abschnitt 7.3 soll dann gezeigt werden, dass die arithmetische Allgemeinheit aufgrund ihrer Unendlichkeit nur normativ aufgefasst werden kann und deshalb durch die Möglichkeit solcher Konstruktionsregeln für bestimmte arithmetische Beweise zu definieren ist. Die Adäquatheit der nominalistischen Charakterisierung arithmetischer Gesetze ergibt sich dann aus dem Umstand, dass die Möglichkeit der algebraischen oder induktiven Schematisierung arithmetischer Beweise ihrerseits wieder syntaktisch zu verstehen ist. Auf der Grundlage dieser Überlegungen soll dann in Abschnitt 7.4 die Verwendung des sogenannten Induktionsaxioms untersucht werden.

7.1 Eine Gleichung, die aus einer arithmetischen Gleichung durch die Ersetzung mindestens einer Ziffer durch eine *Variable* entsteht, sei im Folgenden als *algebraisch* bezeichnet. In diesem Sinn handelt es sich also etwa bei den folgenden fünf Gleichungen, welche die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze von Addition und Multiplikation kodifizieren um algebraische Gleichungen:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$a+b = a+b$$
$$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$
$$a\times b = a\times b$$
$$a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$$

Ebenso sind diejenigen Gleichungen algebraischer Art, durch Bezug auf welche die Addition rekursiv definiert wird:

$$a+0 = a$$
$$a+(n+1) = (a+n)+1$$

Dass eine arithmetische Gleichung einer algebraischen Gleichung *genügt*, soll im Folgenden in etwa so viel bedeuten, dass die linke Seite der arithmetischen Gleichung nach dem Vorbild der algebraischen Gleichungen in die rechte Seite der arithmetischen Gleichung umgeformt werden kann. Dass eine arithmetische Gleichung einer Algebraischen genügt, ist demnach gleichbedeutend damit, dass die beiden arithmetischen Terme in einer syntaktischen Beziehung zueinander stehen, welche durch die algebraische Gleichung schematisch dargestellt wird.

Ein *arithmetischer Beweis* einer arithmetischen Gleichung (relativ zu einer bestimmten Menge algebraischer Gleichungen) kann dann als eine die beiden Terme der Gleichung verbindende *Gleichungskette* arithmetischer Terme definiert werden, in der je zwei benachbarte arithmetische Terme einer der algebraischen Gleichungen genügen. Es sei im Folgenden angenommen, dass arithmetische Beweise arithmetischer Gleichungen standardmäßig in der Weise dargestellt werden, dass jeweils die bewiesene Gleichung unter die beweisende Gleichungskette geschrieben wird:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{m-1} = A_m$$
$$\mathbf{A_1 = A_m}$$

In diesem Sinn stellt etwa die folgenden Zeichenfigur einen arithmetischen Beweis der Gleichung $(2+3)^2 = 2^2+2(2\times3)+3^2$ relativ zu denjenigen algebraischen Gleichungen dar, durch welche das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetze ausgedrückt werden:[1]

$$(2+3)^2 = (2+3)(2+3) = 2(2+3)+3(2+3) = 2^2+2\times3+3\times2+3^2 = 2^2+2\times2\times3+ 3^2$$
$$\mathbf{(2+3)^2 = 2^2+2(2\times3)+3^2}$$

Im Rahmen der Konstruktion arithmetischer Beweise werden algebraische Gleichungen als *Umformungsvorbilder* verwendet, insofern die Übergänge zwischen zwei arithmetischen Termen in einer Gleichungskette jeweils durch Bezug auf bestimmte algebraische Gleichungen konstruiert, geprüft und gerechtfertigt werden. Für eine weitere Präzisierung der Charakterisierung der Funktion algebraischer Gleichungen bietet es sich an dieser Stelle an, kurz den Zusammenhang zwischen dem Beweis, der Verifikation und der Wahrheit arithmetischer Gleichungen dazustellen, auf den in den beiden nächsten Kapiteln noch zurückzukommen sein. Eine

[1] Der Kürze halber sind hierbei teilweise mehrere Umformungsschritte zusammengefasst.

arithmetische Gleichung ist genau dann wahr in einem bestimmten Kalkül, wenn sie relativ zu denjenigen algebraischen Gleichungen beweisbar ist, welche die den Kalkül definierenden syntaktischen Beziehungen darstellen. Und die Feststellung, dass eine arithmetische Gleichung in einem bestimmten Kalkül wahr ist, besteht darin, einen Beweis der Gleichung relativ zu denjenigen algebraischen Gleichungen zu konstruieren, welche den fraglichen Kalkül definieren. Algebraische Gleichungen sind somit *Verifikationsparadigmen* arithmetischer Gleichungen. Und die Verwendung des Additionszeichens etwa ist in ähnlicher Weise durch die in der rekursiven Definition der Addition gegebenen algebraischen Gleichungen bestimmt, wie die Verwendung von Farbprädikaten durch entsprechende Farbmuster bestimmt ist.

Während eine algebraische Gleichung arithmetische Gleichungen und damit einfache Übergänge zwischen arithmetischen Termen schematisiert, lassen sich durch Gleichungsketten, welche aus algebraischen Termen gebildet sind, arithmetische Beweise schematisieren. In dieser Weise lässt sich z.B. der soeben dargestellte Beweis von $(2+3)^2 = 2^2+2(2\times3)+3^2$ wie folgt algebraisch schematisieren:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

Eine solche algebraische Gleichungskette, aus welcher sich durch die Substitution von Ziffern – oder arithmetischen Termen – für die Buchstaben arithmetische Beweise von arithmetischen Gleichungen einer bestimmten Form ergeben, werden als *algebraische Beweise* der entsprechenden algebraischen Gleichung bezeichnet.

Ebenso wie die arithmetischen Beweise werden auch die algebraischen Beweise nach bestimmten Regeln aus algebraischen Gleichungen konstruiert. Auch das Buchstabenrechnen besteht also im Befolgen bestimmter syntaktischer Regeln. Und falls ein algebraischer Beweis einer algebraischen Gleichung aus denjenigen algebraischen Gleichungen konstruiert ist, durch welche ein bestimmter arithmetischer Kalkül definiert ist, dann stellt dieser Beweis ein Schema – also formales Paradigma – für die Konstruktion der arithmetischen Beweise derjenigen arithmetischen Gleichungen dar, welche durch die algebraische Gleichung schematisiert werden. Wie zuvor erläutert, besteht hierbei also die Regel für die Konstruktion der arithmetischen Beweise aus dem algebraischen Beweis in der Substitution von Ziffern (bzw. arithmetischen Termen) für Buchstaben.

Wenn die einen arithmetischen Kalkül definierenden algebraischen Gleichungen um eine aus diesen Gleichungen beweisbare algebraische Gleichung ergänzt werden, so ändert sich der fragliche arithmetische Kalkül insofern nicht, als dieselben arithmetischen Gleichungen beweisbar bleiben. So lässt sich z.B. jeder arithmetische Beweis, welcher entsprechend der arithmetischen Grundgesetze *sowie* der binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ konstruiert ist, auch allein entsprechend der Grundgesetze konstruieren. Denn der algebraische Beweis von $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ aus den die Grundgesetze kodifizierenden algebraischen Gleichungen zeigt, wie sich die durch die binomische Formel schematisierten Übergänge eines arithmetischen Beweises in Übergänge zerlegen lassen, welche durch die den Grundgesetzen entsprechenden algebraischen Gleichungen schematisiert werden. Man kann daher also sagen, dass die Erweiterung des durch die Grundgesetze definierten arithmetischen Kalküls durch die binomische Formel insofern *konservativ* ist, als sich hieraus keine Erweiterung im Hinblick auf die Beweisbarkeit arithmetischer Gleichungen ergibt.

Ganz allgemein betreffen die Änderungen eines arithmetischen Kalküls, welche sich aus dem Hinzufügen konservativer Paradigmen ergeben, nicht die Beweisbarkeit von Gleichungen, sondern lediglich die beiden folgenden zusammenhängenden Punkte: Erstens können arithmetische Beweise dem konservativen Paradigma entsprechend *abgekürzt* werden. So kann etwa unter Berufung auf die binomischen Formel die Gleichung $(2+3)^2 = 2^2+2\times2\times3+3^2$ unmittelbar niedergeschrieben werden. Die beiden links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme müssen also nicht erst wie im zuvor gegebenen und allein auf den arithmetischen Grundgesetzen basierenden Beweis durch verschiedene andere Terme miteinander verbunden werden. Zweitens kann das konservative Paradigma als *Kriterium für Fehler* bei der Befolgung der alten Paradigmen verwendet werden. So zeigt der algebraische Beweis der binomischen Formel, dass man bei der Anwendung der Grundgesetze auf $(2+3)^2$ zu $2^2+2\times2\times3+3^2$ gelangen muss. Der wesentliche Zweck der Konstruktion algebraischer Beweise besteht darin, die derart bewiesenen algebraischen Gleichungen als konservative Rechenparadigmen zu archivieren; also als Regeln für das systematische Abkürzen und Kontrollieren arithmetischer Beweise, welche auch ohne ihre Zuhilfenahme konstruierbar sind.

7.2 Im Hinblick auf die tatsächliche Rechenpraxis war die im Abschnitt zuvor gegebene Definition des Begriffs des arithmetischen Beweises etwas eng. Denn auch wenn man sagen kann, dass die Standardform eines arithmetischen Beweis einer Gleichung $A_1=A_m$ in einer A_1 mit A_2 verbindenden Gleichungskette besteht, so können natürlich auch andere Zeichenfiguren als Beweise von $A_1=A_2$ gelten, vorausgesetzt, dass aus diesen Figuren nach einer allgemeinen Regel eine A_1 mit A_m verbindende Gleichungskette konstruierbar ist.

Sind etwa $A_1= \ldots = A_i$ und $A_i = \ldots = A_m$ arithmetischen Beweise von $A_1=A_i$ und $A_i=A_m$, so ist die Verknüpfung $A_1 = \ldots = A_i = \ldots = A_m$ trivialerweise ein arithmetischer Beweis von

$A_1=A_m$. Aus diesem Grund kann also auch die aus beiden arithmetischen Beweisen bestehende Figur

$$A_1 = \ldots = A_i$$
$$A_i = \ldots = A_m$$

als arithmetischer Beweis $A_1 = A_m$ gelten. Offenbar kann diese Figur ebenfalls als arithmetischer Beweis der Konjunktion $A_1=A_i \wedge A_i=A_m$ aufgefasst werden. Und die zuvor geschilderte Verknüpfungstechnik, welche zeigt, wie aus den Beweisen der Konjunktionsglieder ein Beweis von $A_1=A_m$ konstruiert werden kann, zeigt somit, dass ganz allgemein $A_1=A_m$ aus einer Konjunktion der Form $A_1=A_i \wedge A_i=A_m$ abgeleitet werden kann.

Angenommen nun, ein Beweis von $A_1=A_m$ habe die folgende Gestalt:

$$A_1 = \ldots = A_k(B_1) = A_k(B_2) = \ldots = A_k(B_{n-1}) = A_k(B_n) = \ldots = A_m$$
$$\mathbf{A_1 = A_m}$$

D.h., in der Teilkette $A_k(B_1) = \ldots = A_k(B_n)$ wird jeweils nur ein Teilterm B_i sukzessive umgeformt, während der Restterm $A_K(\_)$ identisch bleibt. Ein solcher Beweis kann in die beiden folgenden Gleichungsketten zerlegt werden:

$$B_1 = \ldots = B_n$$
$$A_1 = \ldots = A_k(B_1) = A_k(B_n) = \ldots = A_m$$

Während hierbei die erste Kette ein arithmetischer Beweis von $B_1=B_n$ ist, ist in der zweiten Gleichungskette der Übergang von $A_k(B_1)$ zu $A_k(B_n)$ nicht durch eine den arithmetischen Kalkül definierende algebraische Gleichung, sondern durch die arithmetische Gleichung $B_1=B_n$ vermittelt. Aus diesem Grund kann diese zweite Gleichungskette als arithmetischer Beweis der Implikation $B_1=B_n \Rightarrow A_1=A_m$ aufgefasst werden. Und die zuvor dargestellte Regel zur Konstruktion eines Beweises von $A_1=A_m$ aus diesen beiden Beweisen, zeigt dann die Gültigkeit des *Modus Ponens* – also des Schlusses von $B_1=B_n \wedge (B_1=B_n \Rightarrow A_1=A_m)$ auf $A_1=A_m$ – für arithmetische Gleichungen.

Diese Art des Schlusses ist offenbar verallgemeinerbar. So kann etwa auch von $C_1=C_j \wedge (C_1=C_j \Rightarrow B_1=B_n) \wedge (B_1=B_n \Rightarrow A_1=A_m)$ kann auf $A_1=A_m$ geschlossen werden, da sich aus den Beweisen

$$C_1 = ... = C_k$$
$$B_1 = ... = B_j(C_1) = B_j(C_k) = ... = B_n$$
$$A_1 = ... = A_k(B_1) = A_k(B_n) = ... = A_m$$

wie folgt ein Beweis von A_1=A_m konstruieren lässt:

$$A_1 = ... = A_k(B_1) = ... = A_k(B_j(C_1)) = ... = A_k(B_j(C_k)) = ... = A_k(B_n) = ... = A_m$$
$$\mathbf{A_1 = A_m}$$

Im Folgenden seien die Beweise einer Gleichung, welche in Form eines Modus Ponens Arguments geschrieben sind, als Beweise in *MP-Form* bezeichnet.

Für fixe a und b lassen sich die Instanzen des Assoziativgesetzes a+(b+n) = (a+b)+n allein durch Rückgriff auf die beiden ‚+' definierenden algebraischen Gleichungen a+0 = a und a+(b+1) = (a+b)+1 beweisen. Der folgende Beweis für n=0 stützt sich lediglich auf die erste dieser beiden Gleichungen (also auf a+0 = a):

$$a+(b+0) = a+b = (a+b)+0$$
$$\mathbf{a+(b+0) = (a+b)+0}$$

Die zweite Gleichung des Rekursionsschemas a+(b+1) = (a+b)+1 ist die Instanz und damit der Beweis für n=1. Beweise für n=2, n=3 und n=4 können in MP-Form wie folgt dargestellt werden:

$$a+(b+2) = a+(b+(1+1)) = a+((b+1)+1) = (a+(b+1))+1 = ((a+b)+1)+1 = (a+b)+(1+1) = (a+b)+2$$
$$\mathbf{a+(b+2) = (a+b)+2}$$

$$a+(b+2) = a+(b+(1+1)) = a+((b+1)+1) = (a+(b+1))+1 = ((a+b)+1)+1 = (a+b)+(1+1) = (a+b)+2$$
$$a+(b+3) = a+(b+(2+1)) = a+((b+2)+1) = (a+(b+2))+1 = ((a+b)+2)+1 = (a+b)+(2+1) = (a+b)+3$$
$$\mathbf{a+(b+3) = (a+b)+3}$$

$$a+(b+2) = a+(b+(1+1)) = a+((b+1)+1) = (a+(b+1))+1 = ((a+b)+1)+1 = (a+b)+(1+1) = (a+b)+2$$
$$a+(b+3) = a+(b+(2+1)) = a+((b+2)+1) = (a+(b+2))+1 = ((a+b)+2)+1 = (a+b)+(2+1) = (a+b)+3$$
$$a+(b+4) = a+(b+(3+1)) = a+((b+3)+1) = (a+(b+3))+1 = ((a+b)+3)+1 = (a+b)+(3+1) = (a+b)+4$$
$$\mathbf{a+(b+4) = (a+b)+4}$$

Wenn diese Beweise in der Standardform – also als Gleichungsketten – geschrieben werden, können sie ihrer variierenden Länge wegen nicht durch einen algebraischen Beweis algebraisch schematisiert werden. Möglich ist jedoch offenbar eine algebraische Schematisierung der Implikationen $a+(b+n)=(a+b)+n \Rightarrow a+(b+(n+1))=(a+b)+(n+1)$ durch

$$a+(b+(n+1)) = a+((b+n)+1) = (a+(b+n))+1 = ((a+b)+n)+1 = (a+b)+(n+1)$$

Auf der Grundlage dieses Schemas kann – zusammen mit der Beweis der ersten Instanz des Assoziativgesetzes – wie folgt ein arithmetischer Beweis eines beliebigen Instanz $a+(b+k)=(a+b)+k$ des Assoziativgesetzes konstruiert werden: Zuerst wird ein solcher Beweis in MP-Form konstruiert, indem der Beweis der ersten Instanz dieser Gleichungen sowie die ersten k-1 Instanzen des obigen algebraischen Implikationsbeweises niedergeschrieben werden. Aus diesem Beweis wird dann in der zuvor dargestellten zu einer Gleichungskette und damit zu einem entsprechenden Beweis in Standardform übergegangen.

Auch dieses Verfahren ist natürlich verallgemeinerbar! In weitgehender Übereinstimmung mit der üblichen Terminologie sei unter dem *Induktionsschema einer algebraischen Gleichung F(n)=G(n)* ein arithmetischer Beweis von $F(1)=G(1)$ sowie ein algebraischer Beweis der Implikation $F(n)=G(n) \Rightarrow F(n+1)=G(n+1)$ verstanden. Aus einem solchen Induktionsschema

$$F(1) = \ldots = G(1)$$
$$F(n+1) = \ldots = \ldots =_{F(n)=G(n)} \ldots = \ldots = G(n+1)$$

lassen sich dann in der soeben am Beispiel beschriebenen Weise arithmetische Beweise der Instanzen $F(k)=G(k)$ konstruieren, indem von einem Beweis in der folgenden MP-Form in kanonischer Weise zu einer $F(k)$ mit $G(k)$ verbindenden Gleichungskette übergegangen wird:

$$F(1) = \ldots = G(1)$$
$$F(2) = \ldots = \ldots =_{F(1)=G(1)} \ldots = \ldots = G(2)$$
$$\ldots$$
$$F(k-1) = \ldots = \ldots =_{F(k-2)=G(k-2)} \ldots = \ldots = G(k-1)$$
$$F(k) = \ldots = \ldots =_{F(k-1)=G(k-1)} \ldots = \ldots = G(k)$$

Neben dem algebraischen Beweis einer algebraischen Gleichung stellt somit auch das Induktionsschema einer algebraischen Gleichung ein formales Paradigma dar für die

Konstruktion der arithmetischen Beweise derjenigen arithmetischen Gleichungen, welche durch die algebraische Gleichung schematisiert werden (vgl. *PG* S. 430). Das Induktionsschema einer algebraischen Gleichung zeigt somit auch, dass diese Gleichung konservativ relativ zu denjenigen algebraischen Gleichungen ist, welche in den beiden das Induktionsschema bildenden Beweisen verwendeten werden. Indem etwa das allein durch Bezug auf die rekursive Definition der Addition konstruierte Induktionsschema des Assoziativgesetzes zeigt, wie die Instanzen dieses Gesetzes allein durch Bezug auf die fragliche Definition bewiesen werden können, zeigt es auch, dass durch die Annahme dieses Gesetzes keine arithmetischen Beweise konstruierbar sind, die sich nicht auch allein durch Bezug auf die rekursive Definition konstruieren lassen.

Der Unterschied zwischen *Induktionsschemata* einerseits und *algebraischen Beweisen* andererseits besteht zum einen in deren *Formen*: das Induktionsschema ist eine Kombination aus zwei Beweisen, einem Arithmetischen und einem Algebraischen. Zum anderen unterscheiden sich Schemata der beiden Arten in Bezug auf die *Regel*, nach der sich aus ihnen arithmetische Beweise konstruieren lassen. Während arithmetische Beweise aus Algebraischen durch einfache Substitution von Ziffern (bzw. Termen) für Buchstaben erzeugt werden, wird aus einem Induktionsschema zunächst durch Kombination des arithmetischen Beweises mit eine geeigneten Menge arithmetischer Instanzen des Implikationsbeweises ein arithmetischer Beweis in MP-Form konstruiert, von welchem dann zu einem Beweis in Standardform übergegangen werden kann.

7.3 Auf der Grundlage der beiden vorangegangenen Abschnitte soll nun die Verwendung das *Allquantors* in der Arithmetik untersucht werden. Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit erläutert, wird im Rahmen der Standardsemantik davon ausgegangen, dass die logischen Konstanten im Allgemeinen und die Quantoren im Besonderen in allen Kontexten dieselbe Bedeutung haben. Folglich, so die Annahme, ist die Verwendung des Allquantors in arithmetischen Kontexten in derselben Weise zu erklären wie empirischen Kontexten. Sei ‚P‘ ein arithmetisches Prädikat, so lautet diese Erklärung also wie folgt:

‚$\forall$n: P(n)‘ ist wahr $\Leftrightarrow$ ‚P‘ trifft auf jede natürliche Zahl zu

Für die Bewertung dieser Erklärung ist – wie immer – danach zu fragen, welche Verifikationsregel sie kodifizieren soll. Ein erster Einwand könnte nun lauten, dass diese Erklärung suggeriere, arithmetische Operationszeichen (wie z.B. ‚+‘ oder ‚×‘) und damit auch die daraus gebildeten Prädikate würden nicht Zahlzeichen, sondern die durch diese Zeichen vermeintlich bezeichneten Gegenstände klassifizieren. Obwohl dieser Einwand vor dem

Hintergrund der Untersuchungen des vorherigen Kapitels berechtigt erscheint, soll auf diesen Punkt erst im nächsten Kapitel zurückkommen werden, in welchen dann auch *realistische* Erklärungen des arithmetischen Vokabulars diskutiert werden sollen; also Erklärungen, welche den Zahlzeichen bestimmten *Bezugsgegenstände* zuordnen. Da im Rahmen der Standardsemantik angenommen wird, dass es für jede natürliche Zahl eine entsprechende Ziffer gibt, kann an dieser Stelle zunächst davon ausgegangen werden, dass die obige Erklärung äquivalent zu der folgenden Substitutionserklärung ist:

‚$\forall$n: P(n)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Für jede Ziffer ‚n' ist ‚P(n)' wahr.

Für eine allquantifizierte algebraische Gleichung ‚F(n)=G(n)' ergibt sich hieraus insbesondere die Bestimmung, dass ‚$\forall$n: F(n)=G(n)' genau dann wahr ist, wenn für jede Ziffer ‚k' die entsprechende Gleichung ‚F(k)=G(k)' wahr ist.

Der Haupteinwand gegen beide Erklärungen ist eigentlich derselbe, der auch schon gegen Quines Definition logischer Wahrheit in 3.3 erhoben wurde. Beide Erklärungen suggerieren, dass die Verifikation ‚$\forall$n: P(n)' in der Prüfung aller Einzelfälle bestehe; also darin, dass jede Zahl *n* daraufhin geprüft wird, ob ‚P' auf sie zutrifft, bzw. darin, dass für jede Ziffer ‚n' die Aussage ‚P(n)' verifiziert wird. Diese Verifikationsbeschreibung ist jedoch sinnlos, da es unendlich viele Zahlen bzw. Ziffern und damit unendliche viele Einzelfälle gibt. So etwas, wie *jede Zahl prüfen* – oder auch: *jede Gleichung verifizieren* –, gibt es einfach nicht. Wenn, was angenommen werden darf, ‚$\forall$n: P(n)' nicht als empirische Gesetzesaussage aufgefasst werden soll, welche behauptet, dass zum gegenwärtigen Zeitpunkt keine Gegenbeispiele – also keine falschen Aussagen der Form ‚F(n)' – bekannt sind, dann sind die beiden Erklärungen insofern unbrauchbar, als sie keine Verifikationsregeln kodifizieren.

Der Schein, es handle sich hierbei um einwandfreie Erklärungen, kann unter Anderem durch die irrige Annahme entstehen, dass sich die Methode der fallweisen Verifikation grundsätzlich von endlichen auf unendliche Bereiche übertragen lasse und in Fällen der letzteren Art lediglich einer menschlichen Schwäche wegen nicht anwendbar sei. In diese Weise argumentiert auch Wittgenstein für die These, dass die Erklärungen der Quantoren nicht ohne weiteres von endlichen Bereichen auf unendliche Bereiche übertragen werden können (vgl. hierzu PG, S. 451 ff.). Nach Wittgenstein ist die Allquantifikation im *endlichen* Fall äquivalent zum entsprechenden logischen Produkt und kann daher wie folgt durch ein solches Produkt erklärt werden:

‚$\forall_{1\leq n\leq k}$: P(n)' bedeutet: $P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k-1)\wedge P(k)$

Diese Erklärung lässt sich offenbar nicht unmittelbar auf den unendlichen Fall übertagen. Denn da ‚$\forall$n: P(n)' natürlich jede Konjunktion der Form ‚P(1)$\wedge$P(2)$\wedge$...$\wedge$P(k-1)$\wedge$P(k)' implizieren sollen, kann ‚$\forall$n: P(n)' zu keiner dieser Konjunktion äquivalent sein. Die Idee eines unendlichen Produkts liegt an dieser Stelle nahe. Aber da es so etwas wie ein unendliches logisches Produkt nicht gibt, muss die intendierte Unendlichkeit in andere Weise symbolisiert werden. Eine – und vielleicht die einzige – Möglichkeit bestünde natürlich in der Einführung eines speziellen Unendlichkeitzeichens wie etwa dem Ausdruck ‚usw. ad infinitum'. In dieser Weise könnte man also erklären wollen:

‚$\forall$n: P(n)' bedeutet: P(1)$\wedge$P(2)$\wedge$P(3)$\wedge$ usw. ad infinitum.

Aber der Scheincharakter dieser Erklärung wäre nun offensichtlich. Denn es ist klar, dass es sich bei ‚P(1)$\wedge$P(2)$\wedge$P(3)$\wedge$ usw. ad infinitum' um eine Aussage einer *neuen* Form handelt, welche es ebenso erst zu erklären gilt wie ‚$\forall$n: P(n)' selbst. Und das einzige, was bis jetzt klar ist, dass diese Aussage, obschon mit logischen Produkt verwandt, *kein* logisches Produkt sein soll.

In Bezug auf arithmetische Gesetze ist nun derselbe Schluss zu ziehen wie in Bezug auf logische Gesetze: ‚$\forall$n: P(n)' behauptet *nicht*, dass alle bislang geprüften Aussagen der Form ‚P(n)' sich als wahr herausgestellt haben, sondern, dass die Verifikation einer beliebigen Aussage der Form ‚P(n)' diese als wahr erweisen *muss*. Und zu beweisen, dass alle Instanzen eines unendlichen Gesetzes wahr sind, kann, wie gesagt, nicht bedeuten, jede der unendlich vielen Instanz zu beweisen. Es kann nur bedeuten, zu beweisen, dass jede Instanz beweisbar ist. Der einzige Kandidat für den Titel eines solchen *Gesetzesbeweises* ist deshalb ein entsprechendes *Beweisgesetz*, also eine Regel für die Konstruktion der arithmetischen Beweise derjenigen Gleichungen, welche die Gesetzesaussage als wahr behauptet. Die Frage nach der Wahrheit eines arithmetischen Gesetzes – also die Frage nach der arithmetischen Allgemeingültigkeit einer nicht bereits als Kalkülregel vorausgesetzten algebraischen Gleichung – kann nur in dieser Weise interpretiert werden, also als eine Frage nach einer Regel für die Konstruktion der Beweise der Gesetzesinstanzen entsprechend der vorausgesetzten Kalkülregeln. Und der Allquantor ist demnach in der folgenden Weise durch die Konstruierbarkeit solcher Beweise zu definieren:

‚$\forall$n: P(n)' ist wahr $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Regel für die Konstruktion der arithmetischen Beweise derjenigen arithmetischen Aussagen, welche durch ‚P(n)' schematisiert werden.

Mit Bezug auf Wittgensteins variablenfreie Notation arithmetischer Gesetze ‚$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge$ usw. ad infinitum' kann dieser Punkt wie folgt erläutert werden. Wie bereits zuvor erläutert, ist in einer derart formulierten Aussage der Ausdruck ‚usw. ad infinitum' insofern *irreduzibel*, als diese Formulierung weder eine Abkürzung des logischen Produktes ‚$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$', noch sonst irgendeines logischen Produktes ist. Man kann jedoch sagen, dass ‚$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge$ usw. ad infinitum' ebenso wie der entsprechende algebraische Ausdruck ‚$P(n)$' eine Schematisierung der Aussagen ‚$P(1)$', ‚$P(2)$', etc., bzw. der entsprechenden logischen Produkte darstellt.

Während nun die einzelnen Produkte ‚$P(1)$', ‚$P(1) \wedge P(2)$', ‚$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$', etc., durch Listen entsprechender arithmetischer Beweise bewiesen werden, kann wiederum keine dieser Beweislisten als Beweis der Gesetzesaussage gelten. Denn da die Gesetzesaussage ‚$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge$ usw. ad infinitum' nicht als ein logisches Produkt, sondern als ein Schema logischer Produkte zu verstehen ist, kommt auch als ein Beweis der Gesetzesaussage keine Liste arithmetischer Beweise, sondern nur eine Schema für Listen solcher Beweise in Frage. Und ein solches Schema kann natürlich wieder durch eine um den Ausdruck ‚usw. ad infinitum' ergänzte Beweisliste dargestellt werden, vorausgesetzt, dass aus den aufgelisteten Beweisen ersichtlich ist, wie diese Liste fortzusetzen ist. Ein solcher variablenfreier Beweis der binomischen Formel ‚$(2+n)^2=2^2+2\times2\times n+n^2$' würde sich also wie folgt gestalten:

$$(2+1)^2 = (2+1)(2+1) = 2(2+1)+1(2+1) = 2^2+2\times1+1\times2+1^2 = 2^2+2\times2\times1+1^2$$
$$(2+2)^2 = (2+2)(2+2) = 2(2+2)+2(2+2) = 2^2+2\times2+2\times2+2^2 = 2^2+2\times2\times2+2^2$$
$$(2+3)^2 = (2+3)(2+3) = 2(2+3)+3(2+3) = 2^2+2\times3+3\times2+3^2 = 2^2+2\times2\times3+3^2$$

usw. ad infinitum

$$\mathbf{(2+1)^2=2^2+2\times2\times1+1^2 \wedge (2+2)^2=2^2+2\times2\times2+2^2 \wedge (2+3)^2=2^2+2\times2\times3+3^2 \wedge \text{usw. ad infinitum}}$$

Und analog hierzu kann die der algebraischen Gleichung ‚$2+(3+n)=(2+3)+n$' entsprechende Gesetzesaussage in der folgenden Weise variablenfrei beweisen werden:

$$2+(3+1)=(2+3)+1$$

$$2+(3+1)=(2+3)+1$$
$$2+(3+2) = 2+(3+(1+1)) = 2+((3+1)+1) = (2+(3+1))+1 = ((2+3)+1)+1 = (2+3)+(1+1) = (2+3)+2$$

$$2+(3+1)=(2+3)+1$$
$$2+(3+2) = 2+(3+(1+1)) = 2+((3+1)+1) = (2+(3+1))+1 = ((2+3)+1)+1 = (2+3)+(1+1) = (2+3)+2$$
$$2+(3+3) = 2+(3+(2+1)) = 2+((3+2)+1) = (2+(3+2))+1 = ((2+3)+2)+1 = (2+3)+(2+1) = (2+3)+3$$

usw. ad infinitum

$2+(3+1)=(2+3)+1 \wedge 2+(3+2)=(2+3)+2 \wedge 2+(3+3)=(2+3)+3 \wedge$ usw. ad infinitum

Der Ausdruck ‚usw. ad infinitum' bliebe also auch in Gesetzesbeweisen irreduzibel, da sich solche Beweise nicht in die Form von (endlosen) Listen bringen lassen.

Ein Beweis kann nicht unendlich viele Beweise *enthalten*; er kann sie nur in einer bestimmten Weise *schematisieren*. Da es aus diesem Grund so etwas, wie einen ‚arithmetischen Beweis eines arithmetischen Gesetzes' nicht gibt, sind arithmetische Gesetze keine arithmetischen Aussagen. Inwiefern arithmetische Gesetze überhaupt als Aussagen bezeichnet werden können, soll im nächsten Kapitel noch diskutiert werden. Klar ist aber bereits an dieser Stelle, dass die Frage nach der Wahrheit eines arithmetischen Gesetzes – *als* Frage nach der Schematisierbarkeit bestimmter arithmetischer Beweise – nicht eine Frage *in* einem arithmetischen Kalkül, sondern eine Frage *über* einen arithmetischen Kalkül ist. Und so etwas wie eine *geregelte* Beantwortung solcher Schematisierbarkeitsfragen gibt es wiederum nur innerhalb einem neuen Kalkül, also einem Kalkül zur Konstruktion von Schemata arithmetischer Beweise.

Wie in den beiden Abschnitten zuvor dargelegt wurde, handelt es sich bei algebraischen Kalkülen – also Kalkülen für das Buchstabenrechnen – sowie bei den auf solchen Kalkülen aufbauenden Induktionskalkülen um Kalküle dieser Art. Denn nach den Regeln dieser Kalküle lassen sich Zeichenfiguren konstruiert, welche in systematischer – wenngleich jeweils unterschiedlicher – Weise arithmetische Beweis schematisieren. Es ist allerdings zu bemerken, dass sich diese Kalküle nicht einfach ohne weiteres aus der Idee der Schematisierung arithmetischer Beweise ergeben. So bedarf insbesondere die Art und Weise, in welcher Induktionsschemata arithmetische Beweise schematisieren, durchaus der Erläuterung. Aus diesem Grund kann auch noch die zuvor gegebene Erklärung von Gesetzesaussagen durch Bezug auf die Möglichkeit einer Konstruktionsregel für entsprechende arithmetische Beweise als unvollständig betrachtet werden. Denn erst durch die zusätzliche Spezifizierung eines bestimmten algebraischen bzw. induktiven Kalküls werden hierdurch tatsächlich bestimmte Verifikationsregeln kodifiziert.

Gemäß einer weitverbreiteten und vor allen von Quine propagierten Auffassung, ist die Verwendung von Quantoren in allen Kontexten *ontologisch verpflichtend* (vgl. z.B. Quine 1981, S. 5 ff., oder 1992, Kap. 2). Dieser Auffassung folgend könnte man zwar eventuell zunächst noch zugestehen, dass die Verwendung arithmetischer *Gleichungen* in nominalistischer Weise als ein bloßes Operieren mit Zeichen in einem Kalkül charakterisiert werden kann. Es müsste dann jedoch behauptet werden, dass man, sobald quantifiziert und damit der Schritt zu einer eigentlichen Wissenschaft gemacht wird, aus dem arithmetischen Kalkül hinaustritt und damit beginnt, über Gegenstände zu theoretisieren, auf welche das arithmetische Vokabular sich bezieht. Wie die zuvor angestellten Untersuchungen zeigen, ist an dieser Überlegung jedoch nur der Punkt richtig, dass man für die Ermittlung arithmetischer Gesetze aus dem arithmetischen Kalkül hinaustreten muss. Aber das bedeutet nicht, dass nun damit begonnen wird, Behauptungen über irgendwelche Gegenstände aufzustellen, auf welche arithmetische Ziffern und Terme sich vermeintlich beziehen. Was geschieht, ist vielmehr ein Übergang zu einem neuen Kalkül (vgl. Waismann 1936, S. 93). Das Buchstabenrechnen der Algebra etwa ist ebenso wie das arithmetische Rechnen mit Ziffern ein Konstruieren von Zeichen nach bestimmten syntaktischen Regeln. Und deshalb bleibt die nominalistische Charakterisierung auch in Bezug auf arithmetische Gesetze korrekt: auch ein arithmetisches Gesetz handelt insofern von Zeichen, als seine Wahrheit gleichbedeutend mit der Konstruierbarkeit einer bestimmten Zeichenfigur – nämlich einem Schema arithmetischer Beweise – ist.

7.4 Zum Abschluss dieses Kapitels sei nun noch kurz die Verwendung des sogenannten *Induktionsaxioms* diskutiert. Dieses lässt sich wie folgt formulieren:

> Sei ‚P' ein beliebiges arithmetisches Prädikat, so gilt: Wenn ‚$P(1)$' und ‚$P(n)\Rightarrow P(n+1)$' wahr sind, dann ist ‚$\forall n$: $P(n)$' wahr.

Wenn man nun an der extensiven Auffassung festhält, wonach ‚$\forall n$: $P(n)$' im Prinzip durch die fallweise Verifikation der ‚$P(n)$' zu verifizieren ist, dann liegt die Idee nahe, es handle sich beim Induktionsaxiom um eine *Hypothese*, welche behauptet, dass die Wahrheit von ‚$P(1)$' und ‚$P(n)\Rightarrow P(n+1)$' ein Anzeichen für die Wahrheit von ‚$\forall n$: $P(n)$' und daher die Konstruktion des Induktionsschemas – also des Beweises von ‚$P(1)$' und ‚$P(n)\Rightarrow P(n+1)$' – eine alternative Verifikationsmethode gegenüber der extensiven Methode sei (vgl. hierzu auch Waismann 1936, S. 91 ff.).

Gegen diese Auffassung ist wieder darauf hinzuweisen, dass die Konstruktion des Induktionsschemas ebenso wenig eine Abkürzung einer fallweisen Verifikation ist, wie ‚$P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge$ usw. ad infinitum' die Abkürzung eines logischen Produktes ist. Die Verwendung von Gesetzesaussagen und damit deren Sinn ist nicht bereits durch die extensive Methode bestimmt; sie wird – zumindest partiell – erst durch die Induktionsmethode erklärt. Aus diesem Grund handelt es sich beim Induktionsaxiom nicht um eine Hypothese, welche eine Verknüpfung zweier Verifikationsmethoden behauptet, dem Beweis von ‚$P(1)$' und

‚$P(n) \Rightarrow P(n+1)$' einerseits und dem extensiven Beweis von ‚$\forall n$: $P(n)$' andererseits. Vielmehr handelt sich um eine *Konvention*, welche dem anderenfalls unerklärten Ausdruck ‚$\forall n$: $P(n)$' eine Verifikationsmethode zuordnet und damit dessen Sinn bestimmt (vgl. PG, S. 397; Waismann 1936, S. 93).

Als Konvention verlangt das Induktionsaxiom keinen *Beweis* oder sonstigen Beleg. Was verlangt werden kann, ist bestenfalls einer *Erläuterung* dafür, dass es *berechtigt* ist, das, was das Induktionsschema beweist, durch den Gebrauch des *Allquantors* zu formulieren. Und diese Erläuterung kann sich so gestalten, wie im vorangegangenen Abschnitt dargestellt. Zum einen ist zu erläutern, dass man zu Recht ‚$\forall n$: $P(n)$' sagen kann, nicht nachdem man jede Instanz bewiesen hat, sondern nachdem man bewiesen hat, dass sich in bestimmter Weise jede Instanz beweisen lassen würde. Und zum anderen ist zu erläutern, in welcher Weise sich mittels des Induktionsschemas die Beweise der Instanzen konstruieren lassen.

Potter formuliert in (2011) zwei Einwände gegen Wittgensteins Auffassung, wonach arithmetische Allgemeinheit durch die Methode des induktiven Beweises definiert ist. Zunächst meint Potter, dass die Auffassung, das Induktionsaxiom sei eine Festsetzung (oder: Definition), nicht erkläre, warum wir uns auf der Grundlage eines gegebenen Induktionsbeweises „berechtigt fühlen", auf die Wahrheit bestimmter Instanzen des bewiesenen Gesetzes zu schließen. Richtig hieran ist der von Wittgenstein nicht nur nicht geleugnete, sondern sogar ausdrücklich betonte Punkt, dass der Zusammenhang zwischen dem Induktionsschema und den Instanzen des dadurch bewiesenen Gesetzes der Erläuterung bedarf (vgl. PG, S. 430). Aber natürlich liefert Wittgenstein eine solche Erläuterung und erklärt damit durchaus, inwiefern das Gefühl, von dem Potter spricht, berechtigt ist: man kann auf die Wahrheit und also die arithmetische Beweisbarkeit der Instanzen schließen, weil das Induktionsschema eine Regel für die Konstruktion der Beweise solcher Instanzen darstellt.

In einem zweiten Einwand weist Potter darauf hin, dass auch der sogenannte *Induktionsschritt* ‚$P(n) \Rightarrow P(n+1)$' genereller Art ist. Wie es scheint, müsste also auch dieser Ausdruck im Prinzip durch ‚$\forall n$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$' notiert und dementsprechend wieder induktiv bewiesen werden. Abgesehen davon, dass sich hieraus noch nicht unmittelbar eine fatale Zirkularität ergäbe, bemerkt Potter selbst, dass natürlich auch die Möglichkeit bestünde, den Induktionsschritt *algebraisch* zu beweisen. Seltsamerweise weist Potter in diesem Zusammenhang nicht ausdrücklich darauf hin, dass Wittgenstein auch genau diese Auffassung vertritt. Induktive Beweise sind nach Wittgenstein Zusammenstellungen aus arithmetischen und algebraischen Beweisen (vgl. PG, S. 399). Aber wie dem auch sei: auch gegen diese Auffassung gibt Potter zu bedenken, dass algebraische Beweise ihrerseits wiederum induktive Beweise voraussetzen können. Anders als Potter zu meinen scheint, ist allerdings durchaus nicht klar, dass sich hieraus tatsächlich ein Einwand entwickeln lässt. Denn noch mal: der entscheidende Punkt für das Verständnis der arithmetischen Allgemeinheit ist der, dass der Beweis eines allgemeinen Gesetzes nur in der Angabe einer Regel zur Konstruktion der entsprechenden arithmetischen Beweise bestehen kann. Und ein arithmetisches Gesetz durch eine Kette von Beweisen zu beweisen, von denen einige induktiver und andere algebraischer Art sind, ist zumindest so lang unproblematisch, wie sich durch diese Beweisketten hindurch ein Weg zu den spezifischen arithmetischen Beweisen finden lässt.

Teil III
Philosophie der Mathematik

8. Die Autonomie arithmetischer Aussagen

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass eine nominalistische Auffassung der Arithmetik, der zu Folge arithmetische Aussagen syntaktischer Art sind, nicht nur kohärent, sondern auch verifikationsadäquat ist. In diesem Kapitel soll nun die realistische Gegenposition untersucht und bewertet werden, der zu Folge, die Wahrheit arithmetischer Aussagen von der Existenz oder Beschaffenheit von vermeintlichen Bezugsgegenständen der Ziffern abhängig ist. So soll in den Abschnitten 8.1-8.3 zunächst dafür argumentiert werden, dass die realistische Position inadäquat ist, falls bestimmte konkrete Gegenstände als die vermeintlichen Gegenstände der Arithmetik bestimmt werden. Werden die arithmetischen Gegenstände dagegen als abstrakt aufgefasst, so ist die realistische Auffassung entweder inkohärent (8.4), oder aber sie fällt mit der nominalistischen Position zusammen (8.5). Auf der Grundlage dieser Untersuchungen sowie den Darstellungen aus den beiden vorangegangenen Kapiteln soll dann in den beiden letzten Abschnitten 8.6 und 8.7 Wittgensteins Autonomiethese präzisiert und bewiesen werden, der zu Folge mathematische Aussagen keiner Wirklichkeit verantwortlich sind.

8.1 Die in den beiden vorangegangenen Kapiteln dargestellte nominalistische Auffassung der Arithmetik war von der Beobachtung geleitet, dass arithmetische Gleichungen und Gesetze nicht in der Weise *verifiziert* werden, dass die Beschaffenheit irgendwelcher Gegenstände untersucht wird, auf welche das arithmetische Vokabular sich bezieht, sondern in der Weise, dass geprüft wird, ob sich diese Ausdrücke – also die Gleichungen und Gesetze – nach bestimmten syntaktischen Regeln konstruieren lassen. Da aus diesem Grund die *Wahrheit* solcher Aussagen in deren *Konstruierbarkeit* nach bestimmten Regeln besteht, wurden auch die Wahrheitsbedingungsbeiträge des arithmetischen Vokabulars in der Form solcher Konstruktionsregeln angegeben. So wurden anstelle von Regeln für die Anwendung von Ziffern und Operationszeichen auf irgendwelche Gegenstände Regeln für die Anwendung der Operationszeichen auf Ziffern angeben. Und in Bezug auf die hierdurch bestimmte

Kombinierbarkeit von Operationszeichen und Ziffern wurde dann die Konstruierbarkeit arithmetischer Gleichungen definiert.

Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit bemerkt, sind nach der wegen ihrer weiten Verbreitung als Standardsemantik bezeichneten Auffassung die Wahrheitsbedingungen von Aussagen *beliebiger* Art in der Form Tarskischer Wahrheitstheorien anzugeben. Dieser Auffassung zu Folge sind also auch die Wahrheitsbedingungen arithmetischer Gleichungen und Gesetze durch Bestimmungen der folgenden Art anzugeben: Zunächst ist ein bestimmter *Gegenstandsbereich* zu charakterisieren, in diesem Fall also der Bereich der natürlichen Zahlen. Dann sind Regeln für die Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars auf diese Gegenstände anzugeben. Hierbei sind genauer die Ziffern durch die Angabe von *Bezeichnungsregeln* und die Operationszeichen durch die Angabe entsprechender *Zutreffensbedingungen* zu erklären. Die Wahrheitsbedingungen der arithmetischen Gleichungen und Gesetze ergeben sich dann aus diesen Angaben sowie den bereichsneutralen Erklärungen des logischen Vokabulars, also den Junktoren, den Quantoren und dem Identitätszeichen.

Gemäß der Standardkonzeption hängt die Wahrheit einer arithmetischen Gleichung also nicht nur von deren Form, sondern *zusätzlich* auch von der Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars auf die Gegenstände der Arithmetik ab. D.h. insbesondere, dass, ob eine arithmetische Gleichung wahr oder falsch ist, nicht nur von der Kombination ihrer Teilausdrücke, sondern auch von der Beschaffenheit der diesen Ausdrücken entsprechenden arithmetischen Gegenstände abhängt. Nach dieser Auffassung wären also auch arithmetische Gleichungen und Gesetze nicht nominalistisch, sondern *realistisch* aufzufassen. Und eine zwar schon hinterfragte, jedoch weiterhin beliebte Annahme wäre dabei, dass den verschiedenen arithmetischen Symbolismen – also etwa der Strich- und der Dezimalnotation – jeweils ein und derselbe Gegenstandsbereich entspricht.[1] Eine wichtige, jedoch von Verfechtern der Standardsemantik selten ausdrücklich diskutierte Folge der realistischen Konzeption der Arithmetik besteht darin, dass die Verifikation arithmetischer Gleichungen und Gesetze zu wesentlichen Teilen in Untersuchungen der arithmetischen Gegenstände bestehen müsste. Das bloß syntaktische Operieren mit arithmetischen Ausdrücken – also das Betreiben eines arithmetischen Kalküls ohne ergänzende Untersuchungen der Gegenstände, auf welche die Ziffern des Kalküls sich beziehen –, könnte demnach bestenfalls als hypothetische Spekulation aufgefasst werden.

Die realistische Konzeption, wonach arithmetische Aussagen nicht von Ziffern, sondern von den durch diese vermeintlich bezeichneten Gegenständen handeln, wird im Wesentlichen

[1] Hinterfragt wurde diese Annahme bekanntermaßen von Benacerraf in (1967).
[2] Vgl. etwa Burgess/Rosen 2005, S. 523 ff., oder Benacerraff 1973, S. 663 ff..

durch zwei Überlegungen motiviert. Die erste Überlegung, welche im Folgenden als *Übersetzbarkeitsargument* bezeichnet werden soll, geht zunächst von der folgenden Prämisse aus:

> (P_1) Ziffern verschiedener Systeme sind wechselseitig ineinander übersetzbar.

Hierbei bezieht sich die fragliche Übersetzbarkeit sowohl auf die Verwendung von Ziffern in arithmetischen Gleichungen als auch auf die Verwendung von Ziffern als Anzahloperatoren in empirische Aussagen. In Bezug auf Aussagen beider Arten kann etwa ‚II' durch ‚2' und ‚III' durch ‚3' übersetzt werden. Denn zum einen ist ‚Es gibt genau 2 F' genau dann wahr, wenn ‚Es gibt genau II F' wahr ist. Zum anderen entspricht etwa ‚S(II)=III' im Strichsystem der Aussage ‚S(2)=3' im Dezimalsystem. Nun gilt ferner Folgendes:

> (P_2) Die wechselseitige Übersetzbarkeit zweier Ziffern kann durch die Rede davon ausgedrückt werden, dass die beiden Ziffern dieselbe Zahl *bezeichnen*.

In diesem Sinn kann also etwa die zuvor genannte Übersetzungsregel dadurch ausgedrückt werden, dass man sagt: ‚3' bezeichnet dieselbe Zahl wie ‚III'. Aus diesen beiden Prämissen scheint man dann schließen zu können:

> (K_1) Ziffern haben Bezugsfunktion.

In Bezug auf die Prämisse (P_1) ist nun zunächst zu bemerken, dass die Übersetzbarkeit von Ziffern natürlich auch nominalistisch interpretierbar ist. Nach nominalistischer Auffassung ist die Verwendung arithmetischer Aussagen durch Bezug auf das intransitive Zählen und die Verwendung von Anzahlaussagen durch Bezug auf das transitive Zählen zu erklären. Dass hierbei z.B. ‚III' durch ‚3' zu übersetzen ist, wäre demnach nicht durch die vermeintliche *Bezugsgleichheit* dieser beiden Ausdrücke zu begründen, sondern vielmehr dadurch, dass die beiden Ausdrücke dieselbe *Position* in den entsprechenden Zähltechniken (des Strich- bzw. des Dezimalsystems) einnehmen (vgl. Rundle 1979, S. 265; Lorenzen 1965, S. 186).

Wenn man nun durch die Rede vom Bezug oder vom Bezeichnen noch *nichts* über die Funktion eines Ausdrucks aussagen will, kann man zwar in der Tat – wie (P_2) behauptet – die wechselseitige Übersetzbarkeit zweier Ausdrücke (in jedem Fall) in der Weise formulieren, dass man sagt, beide Ausdrücke bezeichnen dasselbe. Die nominalistische Konzeption bleibt dann aber dennoch insofern korrekt, als in diesem Fall der Ausdruck ‚Bezug' nicht in einem einheitlichen Sinn verwendet wird (vgl. hierzu auch Wittgenstein PU, §10). Denn anders als im

Fall von Personennamen etwa, ist dann, dass ‚3' und ‚III' sich auf dieselbe Zahl beziehen, einfach gleichbedeutend damit, dass ‚3' und ‚III' Ziffern (Zahlzeichen) sind, welche in ihrer jeweiligen Zähltechnik dieselbe Position einnehmen. Soll dagegen die Rede vom Bezug in (K_1) denselben Sinn haben wie im Fall von Personnamen, dann wäre (K) wie folgt zu interpretieren:

(K_1') Die grundlegende Verwendung einer Ziffer besteht in ihrer Anwendung auf einen eindeutig bestimmten Gegenstand.

Aber diese These – und damit die entsprechende Deutung von (K_1) – ist nun mit Blick auf die tatsächliche Verwendung von Ziffern gewiss irrig: die einzige Ziffernverwendung, welche man eventuell als ein Anwenden von Ziffern auf Gegenstände beschreiben könnte, ist das transitive Zählen. Doch hierbei werden die Ziffern nicht im Sinn der realistischen Konzeption auf Zahlen, sondern auf die jeweils gezählten Gegenstände angewendet. Und auf welchen Gegenstand eine spezifische Ziffer in dieser Weise angewendet wird, ist dabei nicht eindeutig bestimmt, sondern variiert von einem Zählvorgang zum Anderen.

Das zweite und eigentliche Hauptmotiv realistischer Konzeptionen der Arithmetik ist nun wieder das schon in Kapitel 5 ausführlich diskutierte Prinzip der *Syntaxpriorität*, wonach Aussagen mit analoger Syntax (bzw. Logik) auch eine analoge Semantik haben müssen. In Argumenten, welche mehr oder weniger ausdrücklich auf diesem Prinzip beruhen, wird dann also jeweils die semantische Funktion von Ausdrücken des arithmetischen Vokabulars daraus abgleitet, in welcher Weise sich diese Ausdrücke mit dem logischen Vokabular kombinieren lassen. In diesem Sinn argumentiert etwa Frege (1884, § 57) durch Bezug auf das Identitätszeichen für eine realistische Charakterisierung des arithmetischen Vokabulars. Zeitgenössische Autoren argumentieren dagegen typischerweise durch Bezug auf die Quantoren.[2] Das im Folgenden dargestellte Argument, welches sich an Freges Darstellungen orientiert, kann als exemplarisch für Überlegungen der fraglichen Art gelten. Dieses Argument beruht auf drei korrekten (!) Prämissen; einer Syntaktischen, einer Logischen und einer Semantischen. Die syntaktische Prämisse kann dabei wie folgt formuliert werden:

(P_3) Arithmetische Gleichungen werden durch den Gebrauch des Identitätszeichens formuliert.

Hierzu ist im Prinzip nur zu bemerken, dass die Notation ‚T_1=T_2' zwar tatsächlich Standard, jedoch natürlich nicht alternativlos ist. Die nicht ganz unübliche, wenn auch eher auf

[2] Vgl. etwa Burgess/Rosen 2005, S. 523 ff., oder Benacerraff 1973, S. 663 ff..

Gleichungen zwischen Termen und Ziffern beschränkte Form ‚T_1 ergibt T_2' wäre bereits weniger dazu angetan, eine semantische Analogie zu empirischen Identitätsaussagen zu vermuten.[3] Unbestreitbar ist dagegen, dass die folgende logische Analogie zwischen empirischen Identitäten und arithmetischen Gleichungen besteht:

(P_4) Das Identitätszeichen hat in der Arithmetik die Logik eines *Ersetzungszeichens*.

Dass anstelle von ‚ergibt' das Identitätszeichen ‚=' verwendet wird, ist also kein Zufall, sondern durch die Logik der entsprechenden Aussagen gerechtfertigt. Und ebenfalls berechtigt ist natürlich die folgende semantische These:

(P_5) Im empirischen Fall drückt das Identitätszeichen *Bezugsgleichheit* aus.

Unter Voraussetzung des Syntaxprioritätsprinzip (SP) müsste dann geschlossen werden:[4]

(K_2) Auch im arithmetischen Fall drückt das Identitätszeichen *Bezugsgleichheit* aus.
(K_3) Ziffern – und arithmetische Terme im Allgemeinen – haben Bezugsfunktion.

Wie im Kapitel 5 bereits erläutert ist eine solche Argumentation ungültig, weil das Syntaxpriorität irrig ist. Insbesondere wurde dort gezeigt, dass Ersetzbarkeit nicht in jedem Fall als Bezugsgleichheit zu interpretieren ist. Denn die logischen Gesetze, welche einen Ausdruck als Ersetzungszeichen bestimmen und damit die (alternative) Verwendung des Identitätszeichens rechtfertigen, sind vielfach auch dann ableitbar, wenn die links und rechts des fraglichen Ausdrucks stehenden Zeichen nicht bezugnehmend sind. Es sei hierbei an das Beispiel der Richtungsidentität erinnert: eine Aussage der Form ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b' wird nicht verifiziert, indem festgestellt wird, ob sich die beiden Ausdrücke ‚die Richtung von a' und ‚die Richtung von b' auf ein und denselben Gegenstand beziehen, sondern dadurch, dass festgestellt wird, ob die Geraden parallel sind, auf welche sich die beiden Ausdrücke ‚a' und ‚b' beziehen. Die Möglichkeit ‚a ist parallel zu b' in der Form einer solchen Identitätsaussage zu formulieren ist allein darauf zurückzuführen, dass Parallelität eine Äquivalenzrelation ist.

[3] In dieser Weise argumentiert Rundle in 1979, S. 261.
[4] Je nachdem, ob das Syntaxprioritätsprinzip auf die *Syntax* (im eigentlichen Sinn) oder auf die *Logik* von Aussagen bezogen wird, müssten diese Schlüsse auf die syntaktische Prämisse (P_4) bzw. auf die logische Prämisse (P_5) bezogen werden.

Dass nun, wie (K_2) behauptet, das Identitätszeichen in der Arithmetik tatsächlich Bezugsgleichheit ausdrückt, kann also nicht einfach angenommen werden, sondern müsste durch eine entsprechende Darstellung der Verifikation arithmetischer Gleichungen allererst gezeigt werden. D.h.: es müsste gezeigt werden, dass die Feststellung, ob die Wahrheitsbedingungen einer arithmetischen Gleichung erfüllt sind, tatsächlich darin besteht, festzustellen, ob sich die beiden in der Gleichung links und rechts des Identitätszeichens stehenden Terme auf ein und denselben Gegenstand beziehen. Und wie in den vorangegangenen Kapiteln bereits gezeigt wurde, ist eben dies nicht der Fall. Der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung wird festgestellt, indem die Konstruierbarkeit der Gleichung festgestellt wird. So, wie es die Rede vom Ergeben korrekter Weise suggeriert, ist, was in der Verifikation von ‚$T_1=T_2$' festgestellt wird, ob sich ‚T_2' ergibt, wenn ‚T_1' nach bestimmten Regeln umgeformt wird (vgl. Wittgenstein PG, S. 377 ff.). Arithmetik zu betreiben, besteht darin, mit Zeichen nach syntaktischen Regeln zu operieren. Ein Anwenden des Vokabulars auf durch Ziffern vermeintlich bezeichnete Gegenstände gibt es *de facto* nicht. Naturgemäß ist dieser Punkt am einfachsten anhand des grundlegendsten Fall einzusehen, dem von Nachfolgergleichungen ‚S(a)=b'. Der Wahrheitswert einer solchen Gleichung wird offenbar nicht in der Weise ermittelt, dass festgestellt wird, worauf ‚S(a)' und ‚b' sich beziehen, sondern indem festgestellt wird, ob beim transitiven Zählen von ‚a' zu ‚b' übergegangen werden muss (vgl. hierzu auch Büttner 2009, S. 196/7).

Dass sich das Sprachspiel der Arithmetik in dieser Weise gestaltet, ist eine Tatsache. Wenn also *Verifikationsadäquatheit* als das Ziel von Wahrheitsbedingungsangaben verstanden wird, dann ist im Fall arithmetischer Aussagen und Gesetze die Beschränkung auf syntaktische Regeln und damit die nominalistische Konzeption zwingend. D.h.: wenn man an der Kodifizierung derjenigen Regeln interessiert ist, denen beim Betreiben der Arithmetik tatsächlich gefolgt wird, dann kommen Bezugsregeln im realistischen Sinn hierfür nicht in Betracht. Den Gegenstandsbereich der Arithmetik – wenn man an dieser Redeweise festhalten will – bilden demnach die Zahlzeichen selbst, und nicht irgendwelche Gegenstände, auf welche diese Zeichen sich vermeintlich beziehen. Und wie in Kapitel 6 dargelegt, werden diese Gegenstände hierbei entsprechend ihrer syntaktischen Beziehungen klassifiziert. Die Arithmetik ist die Geometrie – nicht: die Physik – der Zahlzeichen (vgl. Wittgenstein PB, § 109).

Im Hinblick auf realistische Konzeptionen der Arithmetik kann und soll in den nächsten beiden Abschnitten nur noch gefragt werden, wie die solchen Konzeptionen entsprechende Verwendung arithmetischer Aussagen überhaupt aussehen könnte, und ob eine entsprechende Erweiterung der Verwendung eindeutig bestimmt wäre.

8.2 Nach Standardauffassung besteht das grundlegende arithmetische Vokabular nur aus der ersten Ziffer ‚0' sowie dem Zeichen für die Nachfolgeroperation ‚S'. Alle anderen Ziffern und Operationssymbole sind dagegen durch Bezug auf diese Zeichen analytisch zu definieren. Vor der Diskussion der Vorschläge dafür, wie ‚0' und ‚S' ihrerseits erklärt werden können, soll zunächst noch knapp dargestellt werden, in welcher Weise die anderen Ziffern und Operationszeichen im Rahmen der Standardsemantik definiert werden bzw. werden müssten.

Hierbei ist zunächst zu bemerken, dass sich die Peano-Axiome allein durch die Verwendung von ‚0' und ‚S' formulieren lassen. Unter der Voraussetzung, dass ‚0' und ‚S' bereits derart erklärt sind, dass die Peano-Axiome (unter dieser Deutung) wahr sind, und dass daher ‚S' für eine injektive Funktion steht, gelten die folgenden beiden zusammenhängenden Punkte. Zum einen handelt es sich bei den Ausdrücken ‚S(0)', ‚S(S(0))', ‚S(S(S(0)))', etc., um singuläre Terme. – Ein solcher Term ‚S(T)' wäre hiernach eine relationale Kennzeichnung, welche sich auf den Nachfolger der Zahl bezieht, auf welche der Teilterm ‚T' sich bezieht. – Aus diesem Grund wäre es ferner berechtigt, diese Ausdrücke links und recht des Identitätszeichens zu schreiben. Die Peano-Axiome legitimieren somit den Übergang zur Gleichungsnotation.

Die von ‚S' verschiedenen arithmetischen Operationszeichen werden dann, wie in Abschnitt 6.4 gesehen, rekursiv durch Bezug auf ‚S' erklärt. Vor der Darstellung der Erklärung der Ziffern, sei zunächst noch einmal darin erinnert, dass Ziffern im Rahmen der nominalistischen Semantik aus Kapitel 6 gar nicht erklärt wurden. Stattdessen wurde die Nachfolgeroperation ‚S' als Kodifikation der Zähltechnik – also des sukzessiven Aufsagens der Ziffern – definiert. Im diesem Sinn wurde also ‚S' durch die folgende Gleichungsfolge definiert:

S(0)=1
S(1)=2
S(2)=3
Etc.

Im Rahmen der Standardsemantik gilt ‚S' dagegen als bereits unabhängig vom Ziffernsystem erklärt. Und die fragliche Gleichungsfolge wird nicht als Definition von ‚S', sondern als Definition der Ziffern betrachtet. Die Ziffern werden also in der folgenden Weise als Abkürzungen entsprechender Kennzeichnungen eingeführt:

1:=S(0)
2:=S(1)
3:=S(2)

Etc.

Unter der Voraussetzung, dass die rechts stehenden Nachfolgerkennzeichnungen Bezug haben, haben die links stehenden Ziffern dann also jeweils denselben Bezug. Falls es also etwa, wie die Peano-Axiome behaupten, genau einen Gegenstand gibt, der unmittelbar auf den durch ‚0' bezeichneten Gegenstand folgt, so bezieht sich ‚1' auf eben diesen Gegenstand.

Der Unterschied zwischen der nominalistischen und der realistischen Konzeption besteht wie gesagt darin, dass die Wahrheitswerte arithmetischer Gleichungen nach realistischer Auffassung nicht nur von der Form der Gleichungen abhängen, sondern auch von der Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars – insbesondere der Ziffern – auf Gegenstände. Dieser Punkt kann nun wie folgt am Beispiel der Nachfolgergleichungen illustriert werden. Nach realistischer Auffassung können die Wahrheitsbedingungen einer solchen Gleichung ‚S(a)=b' – wobei also ‚a' und ‚b' Ziffern sind – in einen formal-analytischen und einen materialen Teil aufgespaltet werden. Hiernach erfordert die Wahrheit von ‚S(a)=b' nicht nur, dass ‚a' und ‚b' der Zählregel genügen, sondern auch, dass es einen Gegenstand gibt, auf den ‚S(a)' und ‚b' sich beziehen. Dabei werden die Peano-Axiome von realistischer Warte aus dahingehend verstanden, dass sie behaupten, es gäbe für jedes der Zählregel genügende Ziffernpaar tatsächlich einen solchen Gegenstand. Der analytische Schritt – also die Feststellung, ob ‚a' und ‚b' der Zählregel genügen – ist nach realistischer Konzeption also nur ein *Teilschritt* in der Verifikation von ‚S(a)=b', der im Prinzip durch die Feststellung zu ergänzen wäre, dass es einen Gegenstand gibt, auf den sich ‚S(a)' und damit auch ‚b' bezieht. So müsste etwa, für die Feststellung, dass ‚S(0)=1' wahr ist, festgestellt werden, dass der durch ‚0' bezeichnete Gegenstand tatsächlich einen eindeutig bestimmten Nachfolger hat. Und die Äußerung von ‚S(0)=1' allein auf der Grundlage des analytische Schritts – also einzig basierend auf der Feststellung, dass ‚0' und ‚1' der Zählregel genügen – wäre nach realistische Konzeption nur als ein hypothetischer Schluss aufzufassen: wenn ‚S(0)' und ‚1' sich überhaupt auf Gegenstände beziehen, dann auf denselben.

Was nun die Erklärungen der grundlegenden Ausdrücke ‚0' und ‚S' angeht, können grob zwei Arten von Erklärungen unterschieden werden. Zum einen *Trivialerklärungen*, welche ‚0' und ‚S' in gleichbedeutende Ausdrücke der Umgangssprache oder Metasprache übersetzen. In diesem Sinn liest man etwa gelegentlich Erklärungen der folgenden Art:

‚0' bezeichnet Null

‚S' trifft auf x und y zu ⇔ y folgt unmittelbar auf x folgt.

Von Formulierungen dieser Art können Erklärungen unterschieden werden, welche ‚0' und ‚S' in nicht offensichtlich gleichbedeutende Ausdrücke übersetzen. Erklärungen dieser Art, welche im Folgenden als *Explikationen* bezeichnet werden sollen, übersetzen ‚0' und ‚S' typischerweise in bestimmte *Mengenausdrücke*. So wird etwa in ZFC definiert (vgl. z.B. v. Neumann 1923):

> ‚0' bezeichnet die leere Menge;
> ‚S' trifft genau auf x und y zu ⇔ y ist die Vereinigung aus x und derjenigen Menge, die nur x als Element enthält.

Für die Bewertung dieser Erklärungen sei zunächst an die Analysen bzw. Explikationen der Rede vom *Bezug* und vom *Zutreffen* aus Anschnitt 1.5 erinnert. Hiernach waren diese Redeweisen jeweils auf das *Anwenden* von Wörtern auf Gegenstände zu beziehen. Dass sich ein Name auf einen Gegenstand bezieht, ist demnach gleichbedeutend damit, dass der Name auf diesen – und auf keinen anderen Gegenstand – anwendbar ist. Und analog hierzu ist, dass ein Prädikat auf einen Gegenstand zutrifft, gleichbedeutend damit, dass das Prädikat auf diesen Gegenstand anwendbar ist. Die Kenntnis der Zutreffens- bzw. der Bezugsregel eines Wortes manifestiert sich in ihrer Befolgung, also im Anwenden des Wortes auf gegebene Gegenstände. Dabei war unter dem Anwenden eines Wortes auf einen Gegenstand das Äußern des Wortes (bzw. der hieraus durch das Präfix ‚Dies ist' gebildeten Aussage) bei gleichzeitigem Zeigen auf den Gegenstand zu verstehen. Sowohl beim Bezug als auch beim Zutreffen handelt es sich demnach um Anwendbarkeitsrelationen. Der Unterschied zwischen beiden Relationen wurde dahingehend expliziert, dass die Anwendbarkeit eines bezugnehmenden Wortes unter raumzeitlicher Identität invariant ist. Die Angabe der Zutreffens- bzw. der Bezugsregel eines Wortes muss also dessen Anwendungsregel kodifizieren. In diesem Sinn bestimmt die analytische Definition eines Namens, dass dessen Anwendbarkeit äquivalent zur Anwendbarkeit des Definiens ist. Dabei wird bei einer solchen Definition vorausgesetzt, dass die Bezugsregel des Definiens ihrerseits erklärt ist. Auf elementarer Ebene sind Namen durch hinweisende Definition zu erklären. Eine solche Erklärung bestimmt, dass der fragliche Name genau dann auf einen zu einem späteren Zeitpunkt gegebenen Gegenstand anwendbar ist, wenn dieser raumzeitlich identisch mit dem Gegenstand ist, auf den in der hinweisenden Definition gezeigt wurde.

Die beiden zuvor genannten Erklärungen des Ausdrucks ‚0' sind nun insofern als analytische Definitionen konzipiert, als hiernach ‚0' dasselbe bedeuten soll wie das umgangssprachliche Zahlwort ‚Null' bzw. wie der mengentheoretische Ausdruck ‚leere Menge'. Nun werden jedoch die Ausdrücke ‚Null' und ‚leere Menge' in den Kontexten, in denen sie de facto verwendet werden, nicht in bezugnehmender Weise verwendet. Denn eine Praxis des

Anwendens dieser Ausdrücke auf Gegenstände gibt es nicht. Aus diesem Grund bestimmen die fraglichen Definitionen von ‚0' zwar, dass ‚Null' bzw. ‚leere Menge' durch ‚0' *ersetzt* werden kann; sie geben jedoch keine *Bezugsregel* für ‚0' an. Auch dann nicht, wenn die fraglichen Ersetzungsregeln durch den Gebrauch des Ausdruck ‚bezieht sich auf' formuliert werden.

Eine Betrachtung der entsprechenden Erklärungen von ‚S' führt zu denselben Ergebnissen. Zunächst kodifiziert die Explikation von ‚S' durch ‚y ist die Vereinigung von x mit der Menge, die nur x als Element enthält' keine Zutreffensbedingungen, weil die Verwendung dieses Ausdrucks zwar dann bestimmt ist, wenn hierin x und y durch geeignete Mengenausdrücke ersetzt werden, nicht jedoch, wenn x oder y durch hinweisende Fürwörter ersetzt werden. Ein *Anwenden* dieses Ausdrucks auf Gegenstände ist nicht Teil der mengentheoretischen Praxis. Der Fall der Trivialerklärung von ‚S' ist etwas komplizierter, da das Definiens ‚folgt unmittelbar auf' in der Umgangssprache nicht nur im arithmetischen Sinn – wie z.B. in der Aussage ‚Drei folgt unmittelbar auf Zwei' –, sondern auch im räumlichen oder im zeitlichen Sinn verwendet wird. Die Verwendungsweise von ‚folgt unmittelbar auf', auf welche sich die entsprechende Trivialerklärung von ‚S' bezieht, ist natürlich die Arithmetische. Aber im arithmetischen Sinn wird ‚folgt unmittelbar auf' nicht auf Gegenstände angewendet, oder zumindest nicht auf Gegenstände, welche durch Ziffern bzw. Zahlwörter bezeichnet werden. Denn wie in Kapitel 6 dargelegt, besteht die grundlegende Verwendung von ‚folgt unmittelbar auf' im arithmetischen Sinn in der Klassifikation von Ziffern (oder Zahlwörtern) entsprechend einer bestimmten Zählregel. Wenn ‚Dies folgt unmittelbar auf jenes' im arithmetischen Sinn verwendet wird, dann beim Zeigen auf zwei Zeichenvorkommnisse. Und die Bedeutung von ‚folgt unmittelbar auf' versteht, wer weiß, in welcher Weise hierdurch die Übergänge in der entsprechenden Zähltechnik formuliert werden.

Der all diesen Erklärungen zugrundeliegende Fehler besteht also darin, dass als Definiens jeweils ein Ausdruck gewählt wird, der nicht die gesuchte Verwendungsweise hat, also ein Ausdruck, dessen grundlegende Verwendung nicht im Anwenden auf Gegenstände besteht. Und der Grund hierfür scheint jeweils der zu sein, dass die Funktion eines Ausdrucks (also die Art seiner Verwendung) nicht aus einer Betrachtung der Verwendung des Ausdrucks, sondern – im Sinn des Syntaxprioritätsprinzips – aus einer Betrachtung seiner Form abgeleitet wird. Das bedeutet natürlich nicht, dass es grundsätzlich unmöglich wäre, *echte* Zutreffens- und Bezugsregeln für ‚0' und ‚S' anzugeben, also Regeln, welche tatsächlich die Anwendbarkeit dieser Ausdrücke auf Gegenstände bestimmen. Auf die Schwierigkeiten, welche sich für derartige Angaben durch die beabsichtigte Geltung der entsprechend interpretierten Peano-Axiome ergeben, wird sogleich zurückzukommen sein. Die folgende Angabe wäre jedoch grundsätzlich denkbar: Zunächst werden Strichziffern der Reihe nach irgendwo niedergeschrieben. Sie könnten also etwa, wie Wittgenstein in (BGM, III §10) nahelegt, in einem Fels geritzt werden. Diese Zeichenvorkommnisse werden dann dadurch zu den Gegenständen der Arithmetik gemacht, dass zum einen ‚0' als Name des ersten Vorkommnisses erklärt wird. Dementsprechend wäre die demonstrative Aussage ‚Dies ist 0' dann und nur dann wahr, wenn bei ihrer Äußerung gleichzeitig auf dieses Zeichenvorkommnis gezeigt wird. Zum anderen wird dann ‚S' durch Bezug auf das 1-1 Zuordnen von Strichen der jeweiligen Zeichenvorkommnisse erklärt, indem bestimmt wird, dass ‚S' genau dann auf zwei Strichziffernvorkommnisse x und y zutrifft, wenn genau ein Strich von y nicht zugeordnet werden kann. Eine weitere, hierzu analoge Möglichkeit bestünde darin, die Kugeln eines Abakus als die Gegenstände der Arithmetik zu betrachten. Die erste der aufgereihten Kugel würde dann durch ‚0' bezeichnet, und ‚S' würde die Nachbarschaft von Kugeln erklärt.

Schon bei Russell (1956, S. 125 ff.) findet sich nun die folgende Beobachtung. Angenommen, ‚0' und ‚S' seien derart durch Bezug auf einen bestimmten Gegenstandbereich erklärt, dass die Peano-Axiome unter der entsprechenden Interpretation wahr sind. Wenn nun der durch ‚0' bezeichnete Gegenstands aus dem Gegenstandsbereich entfernt und ‚0' stattdessen dem Nachfolger dieses Gegenstands zugeordnet wird, dann sind die Peano-Axiome auch bei der hieraus resultierenden Interpretation von ‚0' und ‚S' wahr. Wenn man mit Russell einen entsprechend den Peano-Axiomen strukturierten Gegenstandsbereich eine *Progression* nennt, so zeigt diese Überlegung also, dass auch geeignete Teilstrukturen einer Progression selbst wieder Progressionen sind.

Hieraus folgt unmittelbar, dass allein durch die Bedingung, dass die entsprechend interpretierten Peano-Axiome wahr sind, realistische Erklärungen des arithmetischen Vokabulars – also die Angabe eines bestimmten Gegenstandsbereich, sowie hierauf bezogener Zutreffens- und Bezugsregeln von ‚S' bzw. ‚0' – nicht *eindeutig* bestimmt sind. Russell selbst ist nun der auch von Wright geteilten Ansicht, dass die Eindeutigkeit solcher Interpretationen des arithmetischen Vokabulars dadurch gesichert werden kann, dass nicht – oder: nicht nur – die Geltung der Peano-Axiome, sondern die Möglichkeit gefordert wird, aus dieser Interpretation die Verwendung der Ziffern als Anzahloperatoren abzuleiten (Russell 1956, S. 241; Wright 1983, S. 117 ff.). Dass diese Idee irrig ist, wurde bereits in Abschnitt 5.4 erläutert. An dieser Stelle sei daher nur noch darauf hingewiesen, dass sich die Verwendung der Anzahloperatoren durch Bezug auf beliebige Progressionen in kanonischer Weise erklären lässt, indem bestimmt wird, dass eine Begriff eine bestimmte Anzahl hat, wenn sich die unter ihn fallenden Gegenstände einem entsprechenden Anfangsstück der Progression 1-1 zuordnen lassen (vgl. Quine 1960, S. 262/3).

Bevor in Abschnitt 8.5 noch auf diejenigen Schwierigkeiten realistischer Konzeptionen der Arithmetik eingegangen werden soll, welche sich aus der Annahme der *Abstraktheit* der arithmetischen Gegenstände ergeben, kann an dieser Stelle bereits das folgende Zwischenfazit zu realistischen Konzeptionen gezogen werden. Erstens erweist sich bei einer genaueren Betrachtung der von Realisten typischerweise vorgeschlagenen Erklärungen des arithmetischen Vokabulars, dass diese Erklärungen nicht eigentlich realistischer Art sind. Denn weder die z.B. in der Modelltheorie üblichen Trivialerklärungen, noch die weitverbreiteten mengentheoretischen Erklärungen des arithmetischen Vokabulars liefern Regeln für die Anwendung arithmetischer Ausdrücke auf Gegenstände. Zweitens sind realistische Konzeptionen nicht *verifikationsakkurat* und können also nicht beanspruchen die tatsächliche arithmetische Praxis zu kodifizieren. Denn eine Praxis des Anwendens des arithmetischen Vokabulars auf Gegenstände gibt es einfach nicht. Die Angabe entsprechender Anwendungsregeln würde also in jedem Fall eine Erweiterung der tatsächlichen Verwendungspraxis des arithmetischen Vokabulars – in arithmetischen Aussagen und in Zahlaussagen – darstellen. Und drittens ist festzuhalten, dass eine solche Erweiterung der Verwendung des arithmetischen Vokabulars im realistischen Sinn durch die tatsächliche Verwendung des arithmetischen Vokabulars nicht eindeutig bestimmt ist.

8.3 Die im Abschnitt zuvor beschriebene Unbestimmtheit (Mehrdeutigkeit) realistischer Interpretationen des arithmetischen Vokabulars durch die Peano-Axiome ist das Hauptmotiv für die *strukturalistische* Konzeption der Arithmetik.[5] Dieser Auffassung zu Folge beschreibt die Arithmetik nicht *einen* eindeutig bestimmten und entsprechend den Peano-Axiomen strukturierten Gegenstandsbereich. Vielmehr charakterisiert sie *alle* Strukturen einer bestimmten Art: die Progressionen.[6]

Nach strukturalistischer Auffassung müssten demnach zwei Arten der Verwendung arithmetischer Aussagen unterschieden werden. Zunächst die auf gegebenen realistischen Interpretationen des arithmetischen Vokabulars basierenden *strukturrelativen* Verwendungsweisen, gemäß derer eine arithmetische Aussage genau dann wahr ist, wenn die Gegenstände des durch die gegebene Interpretation bestimmten Bereichs in der durch die Aussage bestimmten Weise beschaffen sind. Von diesen Verwendungsweisen wäre dann ferner eine *strukturvariable* Verwendungsweise zu unterscheiden, gemäß derer eine arithmetische Aussage genau dann wahr ist, wenn sie unter jeder realistischen Interpretation des arithmetischen Vokabulars wahr ist, unter der auch die Peano-Axiome wahr sind. In strukturvariabler Verwendung behauptet eine

[5] Vgl. z.B. Parsons (1990) für eine Darstellung der strukturalistischen Auffassung.
[6] Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass in den folgenden Untersuchungen der strukturalistischen Konzeption weiterhin von der Frage abgesehen werden soll, ob die Gegenstände, welche die verschiedenen Progressionen bilden sollen, abstrakt aufgefasst werden.

arithmetische Aussage demnach, dass sie in Bezug auf jede Progressionsstruktur im strukturrelativen Sinn wahr ist (vgl. Parsons 1990, S. 307). Anders als im Rahmen der strukturrelativen Verwendungen arithmetischer Aussagen hätten Ziffern demnach im Rahmen der strukturvariablen Verwendungsweise arithmetischer Aussagen nicht die Funktion von Eigennamen bestimmter Gegenstände. Ihre Verwendung wäre vielmehr im Sinn von *Rollennamen* zu verstehen. Und insofern es sich bei Progressionen um Ordnungsstrukturen handelt, wären Ziffern also genauer als *Positionsnamen* aufzufassen. D.h.: Wann immer man die Ziffer ‚0‘ in strukturvariablen Aussagen verwendet, bezieht man sich nicht auf einen bestimmten Gegenstand, sondern spricht über die Startelemente beliebiger Progressionen. Und eine Aussage wie ‚0 hat keinen Vorgänger‘ wäre in demnach in analoger Weise aufzufassen wie etwa ‚Der Präsident hat keinen Vorgesetzen‘.

Nun gilt: wenn es überhaupt Interpretationen des arithmetischen Vokabulars gibt, welche die Peano-Axiome als wahr bestimmen, dann gibt es unendlich vieler solcher Interpretationen. Denn wie im Abschnitt zuvor bereits erläutert, lässt sich aus einer gegebenen Progression stets eine Andere erzeugen. Die Allgemeinheit strukturvariabler Aussagen wäre daher wieder nicht *extensiv*, sondern nur *normativ* zu verstehen. Das bedeutet: dass eine arithmetische Aussage in allen Progressionen gilt, kann nicht dadurch festgestellt werden, dass alle Progression auf die Geltung der fraglichen Aussage hin untersucht werden, sondern nur dadurch, dass ein Beweis dafür konstruiert wird, dass die Aussage in jeder Progression gelten muss. Anders ausgedrückt: dass eine arithmetische Aussage im strukturvariablen Sinn wahr ist, wird durch die Konstruktion eines strukturvariablen Beweises festgestellt, und nicht durch die Feststellung, dass die fragliche Aussage in ihren verschiedenen strukturrelativen Deutungen wahr ist. Nun besteht ein solcher strukturvariabler Beweis in einer Ableitung der fraglichen Aussage aus den Peano-Axiomen und, gegebenenfalls, den formalen Definitionen des arithmetischen Vokabulars. Es handelt sich hierbei also um eine Konstruktion einer bestimmten Zeichenfigur nach syntaktischen Regeln. Aus diesem Grund ist die strukturvariable Verwendung arithmetischer Aussagen *nominalistisch* aufzufassen: die Wahrheit einer arithmetischen Aussage besteht auch in diesem Fall in ihrer Konstruierbarkeit nach bestimmten syntaktischen Regeln.

Es kann nun unterstellt werden, dass die strukturrelative Verwendung arithmetischer Aussagen auch von Strukturalisten im realistischen Sinn verstanden wird. Das bedeutet, dass hiernach zunächst das arithmetische Vokabular durch die Angabe eines Gegenstandsbereich, einer Bezugsregel für ‚0‘ sowie einer Zutreffensregel für ‚S‘ in realistischer Weise zu interpretieren wäre. Die Verifikation der entsprechend interpretierten arithmetischen Aussagen müsste sich dann im realistischen Sinn gestalten und also die Form einer Untersuchung der Gegenstände des fraglichen Bereichs annehmen. Insbesondere müssten in dieser Weise auch die Peano-Axiome selbst verifiziert werden, um festzustellen, ob der Gegenstandsbereich, welcher der fraglichen Interpretation zu Grunde liegt, Progressionsstruktur hat. Der Zusammenhang zwischen der strukturvariablen Verwendung arithmetischer Aussagen und deren strukturrelativen Verwendungen könnte dann im Folgenden Sinn als *hypothetisch-deduktiv* konzipiert werden: sobald festgestellt wurde, dass die Peano-Axiome unter einer gegebenen Interpretation und also relativ zu der entsprechenden Struktur wahr sind, kann darauf geschlossen werden, dass unter der fraglichen Interpretation auch alle Aussagen wahr sind, die im strukturvariablen Sinn wahr sind. Unter der Voraussetzung der strukturrelativen Wahrheit der Peano-Axiome kann also die auf der Untersuchung des fraglichen Gegenstandbereichs basierende Verifikation strukturrelativen Aussagen durch entsprechende strukturvariable Beweise ersetzt werden.

Wie sogleich zu zeigen sein wird, ist diese Auffassung der strukturrelativen Verwendung arithmetischer Aussagen problematisch. Die Diskussion der dabei auftretenden Schwierigkeit sei aber zunächst durch eine Betrachtung der Alphabetaussagen eingeleitet, in Bezug auf welche die realistische Konzeption strukturrelativer Verwendung unproblematisch wäre. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde die Alphabetsprache ohne jegliche Angabe von Bezugs- oder Zutreffensregeln für die Buchstaben des Alphabets eingeführt. Stattdessen wurde nur bestimmt, dass das zweistellige Prädikat ‚folgt auf' genau dann auf ein Buchstabenpaar (α,β) zutreffe, wenn α in der Buchstabenliste unmittelbar auf β folgt. Diese Erklärung bestimmt dann bereits die Wahrheitswerte der grundlegenden Alphabetaussagen der Form ‚α folgt auf β' (wobei also α und β für Buchstaben des Alphabets stehen). Und da aus den Wahrheitswerten dieser Aussagen auch die Wahrheitswerte aller anderen Alphabetaussagen ableitbar sind, können die 676 Aussagen der Form ‚α folgt auf β' bzw. ‚$\neg\alpha$ folgt auf β' als Alphabet-Axiome aufgefasst werden.

Bei der Zugrundelegung dieser Regeln ist die Verwendung der Alphabetaussagen also in nominalistischer Weise zu charakterisieren. D.h., die Verifikation einer solchen Aussage besteht in der Untersuchung ihrer Form und nicht in der Untersuchung irgendwelcher Gegenstände, auf welche die Buchstaben des Alphabets sich beziehen. Durch eine geeignete realistische Interpretation des Vokabulars der Alphabetsprache wäre es jedoch auch möglich, die Alphabetaussagen im realistischen Sinn als Behauptungen über bestimmte – von den Buchstaben verschiedene – Gegenstände zu verwenden. Dabei würde eine solche realistische Interpretation genau dann dieselben Aussagen als wahr bestimmen, die auch bei nominalistische Deutung wahr sind, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt: (i) der Gegenstandsbereich umfasst genau 26 Gegenstände; (ii) verschiedenen Buchstaben werden verschiedene Gegenstände zugeordnet; und (iii) das Prädikat ‚folgt unmittelbar auf' trifft genau dann auf zwei Gegenstände x_1 und x_2 genau dann zu, wenn der x_1 bezeichnende Buchstabe im Alphabet auf den x_2 bezeichnenden Buchstaben folgt. Eine solche Interpretation könnte sich also etwa derart gestalten, dass die

Buchstaben des Alphabets an die Schüler einer sechsundzwanzigköpfigen Klasse deren Alter nach vergeben werden, und dass ferner bestimmt wird, dass ‚folgt auf' genau dann auf zwei Schüler zutrifft, wenn der Erste der Nächstältere des Zweiten ist.

Auf der Grundlage einer realistischen Interpretation dieser Art wäre es dann möglich, in der von der strukturalistischen Auffassung nahegelegten Weise vorzugehen. D.h., es könnten zunächst die Alphabet-Axiome – also die 676 Aussagen der Form ‚α folgt auf β' bzw. ‚$\neg\alpha$ folgt auf β' – durch Untersuchungen der Gegenstände des durch die Interpretation bestimmten Bereichs verifiziert werden. Genauer müssten hierfür also jeweils die beiden durch die Buchstaben ‚α' und ‚β' bezeichneten Gegenstände identifiziert und daraufhin untersucht werden, ob ‚folgt auf' auf diese Gegenstände zutrifft. Wenn sich hierbei genau diejenigen der elementaren Alphabetbaussagen als wahr bzw. falsch herausstellen, die auch in nominalistischer Deutung wahr bzw. falsch sind, dann ergeben sich für die Verifikation jeder anderen Alphabetaussage die beiden zuvor geschilderten Alternativen: zum einen die Verifikation durch die durch Untersuchung der bezeichneten Gegenstände, zum anderen die Verifikation durch die Prüfung der Ableitbarkeit aus den Buchstaben-Axiomen.

Nun zurück zu arithmetischen Aussagen! Dass die ersten vier Peano-Axiome unter einer bestimmten realistischen Interpretation von ‚0' und ‚S' wahr sind, ist gleichbedeutend damit, dass die Nachfolgerterme ‚0', ‚S(0)', ‚S(S(0))', etc. unter der fraglichen Interpretation paarweise verschiedenen Bezug haben. Da es unendlich viele dieser Nachfolgerterme gibt, kann deren paarweise Bezugsverschiedenheit nun wiederum nicht, wie im Fall der endlich vielen Alphabet-Axiome extensiv festgestellt werden. D.h.: die strukturrelative Wahrheit der Peano-Axiome kann nicht in der Weise festgestellt werden, dass für jeden der unendlich vielen Terme ‚S(S(... S(0)..))' festgestellt wird, ob er sich – unter der fraglichen Interpretation von ‚0' und ‚S' – auf einen Gegenstand bezieht, auf den sich keiner der ihm in der Bildungsreihe vorangehenden Terme ‚0', ‚S(0)', …, ‚S(...S(0)...)' bezieht. Die strukturrelative Wahrheit der Peano-Axiome kann nur in der Weise festgestellt werden, dass bewiesen wird, dass sich jeder Nachfolgerterm ‚S(S(...S(0)...))' auf einen Gegenstand beziehen *muss*, auf den sich keiner der ihm vorangehenden Nachfolgerterme bezieht. Das bedeutet, dass aus der Interpretation – also aus der Bezugsregel von ‚0' und der Zutreffensregel von ‚S' – abgleitet werden muss, dass ‚S' nur dann auf einen Gegenstand x und den Gegenstand, auf den ‚S(...S(0)...)' sich bezieht zutreffen kann, wenn x verschiedenen von den Gegenständen ist, auf welche die Terme ‚0', ‚S(0)', …, ‚S(...S(0)...)' sich beziehen. Und dies wiederum scheint nur dann möglich, wenn ‚S' wie in den zuvor dargestellten Fällen der Strichziffernvorkommnisse bzw. der Abakuskugeln durch eine *Regel* für die sukzessive Konstruktion (Herstellung) der fraglichen Gegenstände erklärt wird, also durch eine

Konstruktionsregel für Gegenstände des gesuchten Bereiches, welche der formal-syntaktischen Konstruktionsregel der Nachfolgerterme entspricht.

In strukturrelativer Deutung sind die Peano-Axiome demnach nicht synthetisch, sondern analytisch. Denn, ob sie relativ zu einer gegebenen Interpretation wahr sind, ist nicht durch eine Untersuchung von Gegenständen festzustellen, sondern aus einer Analyse der Interpretation – also den Bedeutungserklärungen von ‚0' und ‚S' – abzuleiten. Aus diesem Grund sind die Peano-Axiome auch in strukturrelativer Verwendung nicht als *Hypothesen* über die Gegenstände eines bestimmten Bereichs aufzufassen. Vielmehr charakterisieren sie im Fall ihrer Wahrheit die Logik der entsprechend interpretierten Nachfolgeraussagen. Und wenn die Interpretation von ‚S' wie im Fall der Strichziffernvorkommnisse oder der Abakuskugel in der Form einer Konstruktionsregel gegeben wird, dann handelt es sich bei der durch die Interpretation bestimmten Struktur eigentlich um einen *Kalkül*, in den genannten Fällen also um den Kalkül mit Strichziffern bzw. Abakuskugeln. Die Interpretation selbst ist dann in dem in 6.3 erläuterten Sinn als Kalkülisomorphie zu verstehen. Und anstatt von Progressionsstrukturen sollte man daher vielleicht eher von Progressionskalkülen sprechen.

Mit Blick auf die strukturalistische Grundidee kann somit das folgende Fazit gezogen werden. Zunächst ist noch einmal darauf hinzuweisen, dass die Arithmetik *de facto* ein (bloßer) Kalkül ist, und arithmetische Aussagen demnach nicht in einem strukturrelativen Sinn verwendet werden. Denn ein Anwenden des arithmetischen Vokabulars auf (von spezifischen Ziffernvorkommnissen verschiedene) Gegenstände, so wie es von realistischen Interpretationen vorgesehen ist, ist nicht Teil der tatsächlichen arithmetischen Praxis. Und nun ist zwar die den Strukturalismus motivierende Überlegung berechtigt, wonach verschiedene Interpretationen denkbar sind, welche die Peano-Axiome im strukturrelativen Sinn bewahrheiten. Es ist allerdings zu beachten, dass die strukturrelative Wahrheit dieser Axiome nicht synthetischer, sondern nur analytischer Art sein kann. Die Peano-Axiome sind in allen Deutungen als Regeln und nicht als Hypothesen aufzufassen. Und da es ferner scheint, dass die den Peano-Axiomen genügenden Progressionsstrukturen jeweils nur durch bestimmte Konstruktionsregeln gegeben werden können, scheint man sagen zu können, dass die Arithmetik – egal, ob allein mit Zeichen oder mit spezifischen Zahlparadigmen betrieben – ein Kalkül ist.

8.4 Nach den in den drei vorangegangenen Abschnitten dargestellten Unzulänglichkeiten realistischer Konzeptionen der Arithmetik, seien in diesem Abschnitt nun zuletzt die Schwierigkeiten realistischer Auffassungen diskutiert, welche sich aus der zusätzlichen Annahme ergeben, dass es sich bei den Gegenständen der Arithmetik um *abstrakte* Gegenstände handle.

Der üblichen Terminologie folgend, seien Konzeptionen dieser Art im Folgenden als *platonistisch* bezeichnet.

Die platonistische Konzeption der Arithmetik wird im Wesentlichen durch zwei Beobachtungen motiviert. Zum einen haben Zahlzeichen – worunter im Folgenden Zahlwörter, Ziffern und arithmetische Terme verstanden werden sollen – eine ähnliche Syntax und Logik wie konkrete singuläre Terme, also Ausdrücke, die sich auf raumzeitliche Gegenstände beziehen. So haben etwa arithmetische Gleichungen die Logik empirischer Identitätsaussagen. Zum anderen besteht die Funktion von Zahlzeichen nicht in der Bezugnahme auf raumzeitliche Gegenstände. Anders als konkrete singuläre Terme werden Zahlzeichen nicht in demonstrativen Aussagen der Form ‚Dies ist x' verwendet und somit nicht auf raumzeitliche Gegenstände angewendet. Dem Syntaxprioritätsprinzip folgend, schließen Platonisten aus der ersten Beobachtung, dass Zahlzeichen aufgrund ihrer logisch-syntaktischen Ähnlichkeiten zu konkreten singulären Termen ebenfalls Bezugsfunktion haben müssen. Die beobachteten Verwendungsunterschiede zwischen Zahlzeichen und den daraus gebildeten arithmetischen Aussagen einerseits, sowie die den konkreten singulären Termen und den daraus gebildeten empirischen Aussagen andererseits werden dann auf Unterschiede zwischen in den Gegenständen zurückgeführt, auf welche sich Ausdrücke (bzw. Aussagen) beider Arten beziehen. Die grundlegende semantische Beobachtung ist hierbei also die, dass Zahlzeichen, im Gegensatz zu konkreten singulären Termen, nicht sinnvoll in ‚Dies ist x' eingesetzt werden können. Anders als im Fall empirischer Identitätsaussagen hängen die Wahrheitswerte arithmetischer Aussagen daher nicht von den Wahrheitswerten demonstrativer Aussagen (an irgendwelchen Raumzeitstellen) ab. Dieser Umstand wird von Platonisten derart interpretiert, dass die arithmetischen Gegenstände nicht raumzeitlicher, sondern abstrakter Art sind. Und in analoger Weise wird dann typischerweise auch die Unveränderlichkeit der Wahrheitswerte arithmetischer Aussagen als Unveränderlichkeit der Gegenstände der arithmetischen Gegenstände. Bei Frege (1918) findet sich ferner eine Abgrenzung der abstrakten Gegenstände von psychischen Gegenständen, auf welche gleich noch zurückzukommen sein wird. Hiernach befinden sich abstrakte Gegenstände weder in der Außenwelt (also im Raum), noch in der Innenwelt (also dem Geiste) denkender Subjekte. Vielmehr befinden sie sich in einem dritten Reich (vgl. auch Popper 1972, Kap. 4, für eine ähnliche Konzeption).

Die platonistische Konzeption der Arithmetik kann also durch die These definiert werden, dass arithmetische Aussagen nicht von raumzeitlichen oder innerlich-subjektiven, sondern von abstrakten Gegenständen handeln. Die Arithmetik, aufgefasst als die Beschreibung dieser Gegenstände, wäre hiernach gewissermaßen die Physik des dritten Reiches. Arithmetische Operationszeichen sind dieser Auffassung zu Folge mehrstellige Prädikate, welche also auf bestimmte der abstrakten Gegenstände zutreffen. Ziffern und arithmetische Terme sind singuläre Terme, welche sich bestimmte dieser Gegenstände beziehen. Und die Wahrheit einer arithmetischen Aussage ist jeweils davon abhängig, auf welche Gegenstände des dritten Reiches diejenigen Ziffern und Operationszeichen anwendbar sind, aus denen die Aussage gebildet ist. Insbesondere ist hiernach eine arithmetische Gleichung genau dann wahr, wenn sich die links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme auf ein und denselben abstrakten Gegenstand beziehen.

Eine Konzeption darüber, wovon die Wahrheit einer Aussage abhängt, impliziert immer auch eine Konzeption darüber, wie festgestellt wird, ob die fragliche Aussage wahr ist. Denn Wahrheitsbedingungsangaben implizieren Verifikationsbeschreibungen. Wie bereits erläutert, implizieren *realistische* Wahrheitsbedingungsangaben – d.h. also Angaben, die auf den Formulierungen von Bezugs- und Zutreffensbedingungen für Gegenstände eines bestimmten Bereichs basieren –, dass die Verifikationen der entsprechenden Aussagen darin besteht, dass die Gegenstände des fraglichen Bereichs auf die Anwendbarkeit bestimmter Teile des Vokabulars hin überprüft werden. Da nun speziell nach *platonistischer* Auffassung der Wahrheitswert einer arithmetischen Aussage von der Anwendbarkeit der in ihr enthaltenen Ziffern und Operationszeichen auf abstrakte Gegenstände abhängt, muss die Verifikation einer solchen Aussage im Rahmen platonistischer Konzeptionen als eine Untersuchung abstrakter Gegenstände beschrieben werden. So muss insbesondere die Verifikation arithmetischen Gleichungen in der Weise beschrieben werden, dass hierbei festgestellt wird, ob sich die beiden links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme auf ein und denselben Gegenstand *beziehen*. Und alternativ hierzu müsste, wenn von der Rede vom Bezug eines Ausdrucks zur Rede von seiner Anwendung übergegangen wird, die Verifikation einer Gleichung ‚$T_1=T_2$' als die Prüfung zu beschrieben werden, ob es unter den arithmetischen Gegenständen einen Gegenstand derart gibt, dass ‚T_1' und ‚T_2' auf diesen und auf keinen anderen Gegenstand anwendbar sind.

In Bezug auf die Beschreibung der Verifikation arithmetischer Aussagen ergibt sich also zumindest ein *verbaler* Gegensatz zwischen platonistischen Konzeptionen einerseits und der in den beiden vorherigen Kapiteln entwickelten nominalistischen Konzeption andererseits. Denn da die Verifikation arithmetischer Aussagen nach nominalistischer Auffassung in entsprechenden Rechnungen oder Beweisen besteht, sind die Verifikationen arithmetischer Aussagen als bestimmte Zeichenkonstruktionen zu beschreiben. Hiernach ist insbesondere die Verifikation einer arithmetischen Gleichung ‚$T_1=T_2$' als die Prüfung zu beschreiben, ob sich die beiden Terme ‚T_1' und ‚T_2' durch sukzessive Umformungen gemäß der die Operationszeichen definierenden Eliminierungsregeln auf ein und dieselbe Ziffer reduzieren lassen. Die nach nominalistischer Auffassung für die Verifikation arithmetischer Aussagen relevanten Untersuchungen der syntaktischer Eigenschaften und Relationen arithmetischer Ausdrücke beruht demnach auf der sinnlichen Wahrnehmung entsprechender Zeichenvorkommnisse. Denn die im Rahmen von Rechnungen und Beweisen vorgenommen Konstruktions- bzw. Umformungsschritte werden auf der Grundlage der Wahrnehmung der umzuformenden Ausdrücke sowie bestimmter Umformungsparadigmen vorgenommen. Da die Wahrheitsbedingungen und damit auch die Verifikationsregeln arithmetischer Aussagen im Rahmen platonischer Konzeptionen nach dem Vorbild ähnlich geformter empirischer Aussagen dargestellt werden, erscheint die Annahme unausweichlich, dass die hiernach für die Verifikation arithmetischer Aussagen relevanten Untersuchung der Eigenschaften und Relationen abstrakter Gegenstände – ebenso, wie entsprechende Untersuchungen raumzeitlicher Gegenstände – auf der Wahrnehmung dieser Gegenstände beruht. Die für die Verifikationen arithmetischer Aussagen grundlegenden Feststellungen, ob eine Ziffern bzw. ein Operationszeichen auf bestimmte abstrakte Gegenstände zutrifft, müssen – der intendierten Analogie zu empirischen Aussagen wegen – derart aufgefasst werden, dass hierbei gegebene abstrakte Gegenstände durch deren Wahrnehmung daraufhin geprüft werden, ob die fraglichen Ausdrücke auf sie anwendbar sind. Dieser Kontrast zwischen der nominalistischen und der platonistischen Auffassung kann also wie folgt formuliert werden: während gemäß der nominalistischen Konzeption die verifikationsrelevanten Untersuchungen auf der sinnlichen Wahrnehmung von Zeichenvorkommnissen beruhen, basieren diese Untersuchung gemäß platonistischer Auffassung auf der nicht-sinnlichen Wahrnehmung abstrakter Gegenstände.

Der Zusammenhang zwischen nominalistischen und platonistischen Verifikationsbeschreibungen kann nun, wie es scheint, im Wesentlichen in zweierlei Weise aufgefasst werden. (i) Gemäß einer ersten, im Folgenden als *deflationär* bezeichneten Auffassung sind Beschreibungen beider Arten einfach *synonym*. Hiernach wären also die platonistische und die nominalistische Verifikationsbeschreibung einer bestimmten arithmetischen Aussage einfach zwei alternative Beschreibungen ein und derselben Handlungsweise. Die Wahrnehmung der Abstrakta bestünde dann einfach in der entsprechenden Zeichenwahrnehmung, so dass also etwa auch die Prüfung, ob zwei Terme sich auf denselben abstrakte Gegenstand beziehen, in der Prüfung bestünde, ob sich die beiden Terme auf dieselbe Ziffern reduzieren lassen. (ii) Als *mythologisch* seien im Folgenden all diejenigen platonistischen Auffassungen bezeichnet, die von der Annahme ausgehen, dass die Wahrnehmung der Abstrakta nicht einfach in der Zeichenwahrnehmung besteht. Hiernach bezögen sich also die platonistischen und nominalistischen Verifikationsbeschreibungen jeweils auf *verschiedene* Handlungsweisen, wobei natürlich jeweils der Vorgang, auf welchen sich die platonistische Beschreibung bezieht, als der „eigentliche" – oder: unmittelbare – Verifikationsvorgang anzusehen wäre. Hierbei können ferner zwei Formen mythologischer Auffassungen unterschieden werden. Einerseits könnte angenommen werden, dass sich die abstrakte Wahrnehmung jeweils simultan zur Zeichenwahrnehmung im *Inneren* des Untersuchenden vollzieht. Der von der nominalistischen Position beschriebene Vorgang der Konstruktion einer bestimmten Zeichenfigur wäre dann der *äußere* Begleitvorgang der eigentlichen Verifikation, auf welche sich die platonistischen Beschreibungen beziehen. Eine zweite Spezialisierung der mythologischen Auffassung, welche im Folgenden als die *spekulative* Auffassung bezeichnet werden soll, ergibt sich dagegen aus der Annahme, dass wir Menschen der abstrakten Wahrnehmung und damit der eigentlichen Verifikation nicht fähig sind. Unter dieser Voraussetzung könnten man dann versucht sein, die auf der Zeichenwahrnehmung basierenden Beweiskonstruktionen als eine Art spekulativen *Ersatz* für die eigentliche Verifikation arithmetischer Aussagen auffassen. Die Konstruierbarkeit einer arithmetischen Aussage würde hierbei also als der einzig verfügbare und damit auch beste Grund für die (weiterhin hypothetische) Annahme ihrer Wahrheit interpretiert.

Auch wenn die mythologische Annahme einer spezifischen Form der Wahrnehmung abstrakter Gegenstände von den meisten zeitgenössischen Platonisten abgelehnt wird (vgl. z.B. Künne 1983, Kap. 4.; Hale/Wright 2002), soll diese Annahme an dieser Stelle aus zwei Gründen dennoch diskutiert werden. Zum einen sind diejenigen Bedenken gegen platonistische Konzeptionen der Arithmetik, welche dem in Abschnitt 8.6 zu diskutierenden Dilemma von Benacerraf zu Grunde liegen, wesentlich durch die mythologische Annahme motiviert. Zum anderen soll im nächsten Abschnitt dafür argumentiert werden, dass die mythologische Auffassung insofern die einzig „echte" platonistische Konzeption darstellt, als die deflationäre Position im Prinzip mit der nominalistischen Konzeption zusammenfällt.

Nun also zur Diskussion der mythologischen Konzeption! Da abstrakte Gegenstände per Definition nicht raumzeitlicher Art sind, kann ihre Wahrnehmung nur als eine Art inneren Anschauens konstruiert werden. Um die Eigenschaften arithmetischer Gegenstände sowie deren Relationen zu anderen arithmetischen Gegenständen festzustellen, müsste man sich diese Gegenstände demnach zunächst vor das innere Auge führen. Dieses innere Vorführen bildet das Analogon zur räumlichen Suche nach konkreten Gegenständen und stellt somit das Identifizieren arithmetischer Gegenstände dar. Nach traditioneller Auffassung werden die abstrakten Gegenstände hierbei durch einen spezifischen Abstraktionsvorgang aus den Vorstellungen konkreter Gegenstände gewonnen; im Fall einer Zahl also etwa aus den Vorstellungen einer entsprechenden Anzahl von Gegenständen (vgl. z.B. Husserl 1891, Kapitel 4; oder 1913 § 3/4).[7] Wie genau sich das innere Vorführen gestalten soll, ist jedoch für die weiteren Überlegungen

[7] Gödels Position in (1964) kann ebenfalls als mythologischer Platonismus gelten, auch wenn er – anders als Husserl – die Natur der Wahrnehmung abstrakter Gegenstände nicht weiter untersucht.

irrelevant. Sobald die abstrakten Gegenstände innerlich gegeben sind, kann durch deren Wahrnehmung festgestellt werden, welche arithmetischen Ausdrücke auf sie anwendbar sind. Das Anwenden einer Ziffer – oder allgemeiner: eines arithmetischen Terms – auf einen abstrakten Gegenstand, bestünde in diesem Fall also darin, die Ziffer auszusprechen, während der fragliche Gegenstand innerlich gegeben ist. Diese Verwendungsweise von Ziffern wäre wieder als das Erzeugen von Einwortaussagen aufzufassen, die genau dann wahr sind, wenn die Ziffern auf die jeweils gegebenen abstrakten Gegenstände anwendbar sind. Die Wahrnehmbarkeit abstrakter Gegenstände ist also gleichbedeutend mit Möglichkeit solcher abstrakter Beobachtungsaussagen.

Wie zuvor bereits erwähnt, ist Frege der Ansicht, dass abstrakte Gegenstände nicht im Geiste denkender Subjekte, sondern in einem eigenen, dritten Reich anzusiedeln sind. Freges sich gegen Psychologisten (wie etwa den frühen Husserl) richtende Hauptargument hierfür ist, dass dieselben abstrakten Gegenstände verschiedenen Personen zugänglich sind (Frege 1918). Es scheint jedoch, dass sogar dann, wenn man Frege diesen Punkt zugesteht, immerhin noch das Phänomen der abstrakten Wahrnehmung insofern *privater* (oder: subjektiver) Art bliebe, als der auf abstrakte Gegenstände gerichtete Wahrnehmungsvorgang eines Subjektes nicht durch andere Subjekte wahrnehmbar wäre. Denn auch dann, wenn man zum einen abstrakte Gegenstand abstrakt wahrnehmen kann, und man zum anderen andere abstrakt wahrnehmende Subjekte sinnlich wahrnehmen kann, so kann man dennoch weder sinnlich, noch abstrakt wahrnehmen, dass ein Anderer eine bestimmten abstrakten Gegenstand wahrnimmt. Die vorausgesetzte kategoriale Verschiedenheit zwischen dem konkreten wahrnehmenden Subjekt und dem wahrgenommenen abstrakten Gegenstand verhindert, was im Fall der sinnlichen Wahrnehmung konkreter Gegenstände natürlich möglich ist: die Wahrnehmung eines anderen Wahrnehmenden in dessen Beziehung zu dem von ihm wahrgenommenen Gegenstand.

Diese Privatheit der auf abstrakte Gegenstände bezogenen Wahrnehmungsvorgänge wirft nun für die mythologische Konzeption der Verwendung des arithmetischen Vokabulars das grundlegenden Problem auf, dass niemals nachprüfbar ist, *welche* abstrakten Gegenstände jemandem beim Aussprechen arithmetischer Ausdrücke und Aussagen innerlich gegeben sind. Wittgensteins Argumente gegen die Möglichkeit einer privaten Sprache (PU, §§243-315) sind demnach auch dann auf die mythologische Konzeption übertragbar, wenn die abstrakten Gegenstände in Freges Sinn als *teilbar* betrachtet werden. So ist zunächst festzuhalten, dass der Vorgang des Aussprechens einer Ziffer (oder eines Terms) bei innerlich gegebenem abstrakten Gegenstand nicht auf seine Korrektheit hin überprüft werden kann, da nicht zu ermitteln ist, *welcher* Gegenstand gegeben ist. Da es sich bei solchen Vorgängen also nicht um ein regelgeleitetes Verhalten handeln würde, könnten diese auch nicht als ein Anwenden von

Ausdrücken auf Gegenstände oder als ein Erzeugen von Aussagen bezeichnet werden. Wenn Zahlen im mythologischen Sinn als Gegenstände einer abstrakten Wahrnehmung konstruiert werden, dann gibt es einfach nicht so etwas wie: eine Zahl beim Namen nennen. Auf abstrakte Gegenstände bezogene Einwortaussagen im Allgemeinen und arithmetische Beobachtungsaussagen im Besonderen sind begriffliche Unmöglichkeiten. Durch das Fehlen einer regelgeleiteten Praxis des Anwendens wird ferner auch der Rede vom Verstehen und Erklären entsprechender Zutreffens- oder Bezugsregeln der Boden entzogen. Da das Befolgen solcher Regeln weder korrekt vorgeführt, noch nachgemacht werden kann, kann weder das akkurate vom unakkuraten Erklären unterschieden werden, noch das Verstehen vom Missverstehen. Jemandem, der entweder noch nicht weiß, welche Ziffer welche Zahl bezeichnet, oder der es zwar schon wusste, jedoch wieder vergessen hat, könnte nicht geholfen werden.

Aufgrund der Privatheit der Wahrnehmungen abstrakter Gegenstände, kann also durch Bezug auf diese Wahrnehmungen eine *isolierte* Verwendung von Ziffern oder Operationszeichen (im Sinn eines Anwendens auf abstrakte Gegenstände) nicht reguliert werden. Eine geregelte Verwendung ist natürlich möglich, sobald *mehrere* solcher Zeichen miteinander kombiniert werden; wie etwa in der Praxis des intransitiven Zählen oder der darauf aufbauenden Verwendung von Nachfolgeraussagen. Doch auch eine solche Praxis kann nicht durch Bezug auf private, abstrakte Wahrnehmungen reguliert werden, sondern nur im nominalistischen Sinn durch Bezug auf die Form der hierbei kombinierten Ausdrücke. In diesem Fall behauptet eine entsprechende Aussage dann auch nur diese formale Kombinierbarkeit der Ausdrücke, aus denen sei gebildet ist. Und die Konstruktionen der mythologischen Konzeption – also das innerliche Vorführen und Wahrnehmen abstrakter Gegenstände sowie die auf das auf diese Gegenstände bezogenen Ausdrucksanwendungen – bleiben semantisch irrelevant.

Aus der Unmöglichkeit, die Verwendung von Ausdrücken durch Bezug auf private Wahrnehmungserlebnisse zu regulieren, ergibt sich die grundsätzliche Irrigkeit mythologischer Konzeptionen der Arithmetik. Da auf solchen Wahrnehmungen kein regelgeleitetes Verhalten und darum insbesondere keine Verifikation irgendwelcher Aussagen gegründet werden kann, ist das einzige Verhalten, das für den Status der Verifikation arithmetischer Aussagen in Frage kommt, das Operieren mit arithmetischen Zeichen. Für die beiden zuvor geschilderten speziellen Ausgestaltungen der mythologischen Auffassung gilt daher Folgendes: Zum einen könnten selbst dann, wenn die arithmetischen Zeichenkonstruktionen tatsächlich stets von bestimmten, privaten Erlebnissen begleitet wären, allein die Zeichenkonstruktionen als Verifikationen arithmetischer Aussagen gelten. Und zum anderen können diese Zeichenkonstruktionen deshalb nur als Feststellungen der Wahrheitswerte arithmetischer Aussage und nicht als Spekulation über solche Wahrheitswerte aufgefasst werden, weil Spekulation immer nur relativ zur echten Verifikation zu definieren ist.[8] Und wenn es überhaupt nur ein regelgeleitetes Verhalten gibt, dann ist eben das die Verifikation.

Das Fazit dieses Abschnitts lautet also wie folgt: Eine realistische Semantik, welche die Verwendung des arithmetischen Vokabulars nach dem Modell Name-Benanntes und die Verwendung arithmetischer Aussagen nach dem Modell von Beschreibungen benannter Gegenstände konstruiert, ist unvereinbar mit der Annahme der Abstraktheit der fraglichen Gegenstände. Denn ein Benennen – und damit auch ein Beschreiben – solcher Gegenstände ist nicht regulierbar.

8.5 In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels wurde gezeigt, dass eine auf konkrete Gegenstände bezogene realistische Semantik zwar nicht inkohärent, jedoch auch nicht verifikationsakkurat ist, da arithmetische Aussagen nicht durch die Untersuchung von Gegenständen verifiziert werden, auf welche Ziffern und arithmetische Terme sich beziehen, sondern durch die Konstruktion arithmetischer Beweise. Im Abschnitt zuvor wurde dann dafür argumentiert, dass die Verwendung von Ausdrücken grundsätzlich nicht durch Bezug auf vermeintliche Wahrnehmungen abstrakter Gegenstände reguliert werden kann, da niemals feststellbar wäre, welchen Gegenstand jemand in dieser Weise wahrnimmt. Aus diesem Grund gibt es nur zwei Möglichkeiten, die Verwendung arithmetischer Aussagen zu regulieren: entweder durch Bezug auf Regeln für die Anwendbarkeit des arithmetischen Vokabulars auf bestimmte konkrete Gegenstände oder aber durch Bezug auf syntaktische Regeln für die Kombinierbarkeit arithmetischer Ausdrücke. Wenn die Verifikation arithmetischer Aussagen nicht in der Untersuchung konkreter Gegenstände bestehen soll, dann ist demnach die *Beweistätigkeit* – also das Konstruieren von Zeichenfiguren nach bestimmten syntaktischen Regeln – das einzige Verhalten, das als *Verifikationsverhalten* überhaupt in Betracht kommt.

Dieser letzte Punkt ist nun mit der im vorherigen Abschnitt dargestellten Position des deflationären Platonismus vereinbar. Denn im Rahmen dieser Position wird nicht angenommen, dass es neben dem auf sinnlicher Wahrnehmung basierenden Untersuchen konkreter Gegenstände sowie dem auf sinnlicher Wahrnehmung entsprechender Zeichen basierenden Konstruieren von Zeichenfiguren noch eine dritte Verhaltensweise, nämlich das auf nicht-sinnlicher Wahrnehmung basierende Untersuchen abstrakter Gegenstände, gäbe. Die deflationäre Annahme ist vielmehr die, dass man zwar auch von einem Untersuchen abstrakter Gegenstände reden kann; nur bezieht sich diese Rede einfach auf das Konstruieren von Zeichen nach bestimmten Regeln. So ist heutzutage nicht unüblich, einerseits anzunehmen, dass arithmetische

[8] Vgl. hierzu auch die Bemerkungen zum Zusammenhang zwischen unmittelbarer und mittelbarer Verifikation in Abschnitt 1.3.

Aussagen von abstrakten Gegenständen handeln, auf welche Ziffern und arithmetische Terme sich beziehen, und anderseits die mythologische Auffassung abzulehnen, wonach wir diese Gegenstände durch Abstraktion bzw. durch nicht-sinnliches Anschauen identifizieren. Dennoch kann Vertretern dieser beiden Annahmen die zuvor geschilderte deflationäre Auffassung oftmals nicht direkt zugeschrieben werden, weil sie die Verifikation arithmetischer Aussagen nicht thematisieren und deshalb auch nicht darstellen, worin die Identifikation der arithmetischen Gegenstände bestehen soll. Wie Chihara (in 2005) zu Recht bemerkt, scheinen Platonisten wie etwa Burgess und Rosen der Ansicht zu sein, ihre Position ließe ich allein durch die Kritik nominalistischer Alternativen begründen (vgl. z.B. Burgess/Rosen 1997). Eine Ausnahme hierzu bilden Neo-Fregeaner wie Wright und Künne. Sie weichen der Frage nach dem Zugang zu abstrakten Gegenständen nicht einfach aus, sondern versuchen stattdessen die mythologische durch eine nicht-mythologische Konzeption zu ersetzen. Da nach Künne und Wright der grundlegende Zugang zu Zahlen im Rahmen der Verifikation empirischen Zahlaussagen erfolgt, soll die Diskussion dieser Konzeptionen zunächst zurückgestellt werden, um zuvor die soeben dargestellte, auf die Verifikation arithmetischer Aussagen bezogene deflationäre Position zu untersuchen.

Vor der Bewertung der deflationistischen Position sei an dieser Stelle noch einmal knapp deren Motivation erläutert. Den Ausgangspunkt bildet die Beobachtung, dass arithmetische Aussagen jeweils eine ähnliche Form wie bestimmte empirische Aussagen haben. Arithmetische Gleichungen, etwa, ähneln empirischen Identitätsaussagen in diesem Sinn. Die Annahme des Syntaxprioritätsprinzips erfordert nun, dass die Wahrheitsbedingungen von Aussagen derselben Form in analoger Weise anzugeben und damit deren Verifikationen – also die Feststellungen, ob die entsprechenden Wahrheitsbedingungen erfüllt sind – in analoger Weise zu beschreiben sind. Und da eine empirische Identitätsaussage durch die Feststellung verifiziert wird, ob sich die beiden links und rechts des Identitätszeichens stehenden Ausdrücke auf ein und denselben Gegenstand beziehen, muss nach dem Syntaxprioritätsprinzip also auch die Verifikation einer arithmetischen Gleichung in der Weise beschrieben werden, dass hierbei festgestellt wird, ob sich die beiden links und rechts des Gleichheitszeichen stehenden Terme auf ein und denselben Gegenstand beziehen. Unter der Annahme, dass es sich bei den arithmetischen Gegenständen nicht um konkrete Gegenstände handelt, ergeben sich in dieser Weise also die platonistischen Verifikationsbeschreibungen arithmetischer Gleichungen.

Die mythologische Konzeption kann nun im Prinzip *nur* dadurch vermieden werden, dass nicht beansprucht wird, dass sich die Rede von der Feststellung der Bezugsgleichheit arithmetischer Terme auf eine nicht-sinnliche Wahrnehmung von Gegenständen bezieht, welche sich in einem eigenen Reich – jenseits von Raum und Zeit – befinden. Stattdessen muss diese

Redeweise derart interpretiert werden, dass sie sich auf das tatsächliche Verifikationsverhalten bezieht, und d.h. also auf die Feststellung, ob sich die beiden Terme auf dieselbe Ziffer reduzieren lasse. Bei dieser Interpretation bestünde also etwa das Identifizieren des abstrakten Bezugsgegenstands eines arithmetischen Terms einfach darin, den Term in eine bestimmte Ziffer umzuformen, und nicht etwa darin, einen dem Term entsprechenden Gegenstand durch eine privaten Abstraktionsprozess zu gewinnen.

Nun ist klar: wenn der Sinn platonistischer Verifikationsbeschreibungen in dieser Weise bestimmt wird, dann stellen diese Beschreibungen natürlich auch die tatsächlichen Verifikationsvorgänge dar. Wenn also etwa mit der Rede vom Feststellen davon, ob sich zwei arithmetische Terme auf denselben Gegenstand beziehen, nichts anderes gemeint ist, als die Feststellung, ob sich beide Terme auf dieselbe Ziffern reduzieren lassen, dann kann man natürlich sagen, dass eine arithmetische Gleichung durch die Feststellung verifiziert wird, ob sich die beiden rechts und links des Gleichheitszeichens stehenden Terme auf denselben Gegenstand beziehen.

Die einzige Frage, die sich in diesem Fall noch stellt, ist, ob die platonistischen Redeweisen unter ihrer deflationäre Interpretation *angemessene Formulierungen* für die Beschreibung derjenigen Verhaltensweisen darstellen, auf welche sie sich beziehen. Und diese Frage scheint verneint werden zu müssen. Denn Beschreibungen solcher Art sind insofern *irreführend*, als sie andere als die tatsächlich gemeinten Handlungen vermuten lassen. So suggeriert etwa die Rede von der Feststellung der Bezugsgleichheit arithmetischer Terme natürlich, dass es sich bei der dadurch beschriebenen Handlung gerade nicht um die Umformung der beiden Terme handelt, sondern eben um eine Handlung, die mit dem Ausfindigmachen der Bezugsgegenstände konkreter singulärer Terme vergleichbar ist. Betrachtet man allein diese beiden Handlungsweisen, also das Umformen eines arithmetischen Terms in eine Ziffer einerseits und das Ausfindigmachen des Bezugsgegenstands eines konkreten singulären Terms andererseits, so legt sich eine einheitlicher Beschreibung beider Vorgänge keineswegs nahe. Die deflationäre Auffassung, der zu Folge Vorgänge beider Art als ein Identifizieren von Bezugsgegenständen zu beschreiben sind, kann also nicht durch eine Gemeinsamkeit in den beschriebenen Handlungen motiviert werden, sondern allein durch die formale Ähnlichkeit derjenigen Aussagen, durch welche die Ergebnisse dieser Handlungen ausgedrückt werden. Einzig weil arithmetische Gleichungen und empirische Identitätsaussagen in ähnlicher Weise formuliert werden, könnte man überhaupt versucht sein, auch ihre Verifikationsbeschreibungen in ähnlicher Weise zu formulieren.

Ferner ist zu bemerken, dass die deflationäre Interpretation platonistischer Verifikationsbeschreibungen die Folge hat, dass die darauf basierende platonistische Auffassung gar nicht im Widerspruch zur nominalistischen Auffassung steht. Denn bei dieser Interpretation kann man nicht mehr sagen, dass die Verifikation einer arithmetischen Gleichung in der Feststellung der Bezugsgleichheit der arithmetischen Terme *und nicht* in einer entsprechenden Reduzierbarkeitsfeststellung besteht. Vielmehr müsste man sagen, dass die Verifikation in der Feststellung der Bezugsgleichheit *und also* in der entsprechenden Reduzierbarkeitsfeststellung besteht. Und analog hierzu kann man nicht sagen: der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung hängt nicht nur von der Form, sondern zusätzlich auch von der Beschaffenheit bestimmter abstrakter Gegenstände ab. Stattdessen muss man sagen: der Wahrheitswert einer arithmetischen Gleichung hängt von der Beschaffenheit bestimmter abstrakter Gegenstände und also nur von der Form der Gleichungen ab. Der deflationäre Platonismus ist demnach keine alternative Position zu dem in den beiden vorangegangenen Kapiteln entwickelten Nominalismus, sondern lediglich eine potentiell irreführende Reformulierung dieser Position.

Nun zu der zuvor angekündigten Diskussion von Künnes Position! Diese Position ist insofern deflationärer Art, als Künne zwar die mythologische Annahme einer nicht-sinnlichen Anschauung verwirft, jedoch daran festhält, dass die Funktion von Ziffern bzw. Zahlwörtern (zumindest in bestimmten Kontexten) in der Bezugnahme auf abstrakte Gegenstände besteht. Künnes Grundidee ist hierbei die, dass das *Verstehen* der Ziffern im Rahmen seines Platonismus diejenige Rolle übernehmen soll, welche im Rahmen der mythologischen Konzeption die nicht-sinnlichen Anschauung abstrakter Gegenstände innehat (vgl. Künne 1983, S. 186). Hierfür unterscheidet er zunächst zwei Verwendungsweisen von Ziffern. Demnach wird eine Ziffer ‚n' in arithmetischen Aussagen sowie in den substantivisch formulierten Zahlaussagen der Form ‚Die Zahl der F ist n' im platonistischen Sinn verwendet, also als singulärer Term, der sich auf einen abstrakten Gegenstand bezieht. Dagegen wird ‚n' in einer adjektivischen Anzahlaussage der Form ‚Es gibt n F' nicht als singulärer Term, sondern als numerischer Quantor verwendet. Wird ‚n' als singulärer Term verwendet, so besteht das Verstehen von ‚n' nach Künne darin, zu wissen, auf welchen Gegenstand ‚n' sich bezieht, bzw. darin, zu wissen, wie man den fraglichen Bezugsgegenstand identifiziert (1983, S. 185). Worin das Verstehen des numerischen Quantors ‚Es gibt n' besteht, wird von Künne zwar nicht genauer erläutert. Da es sich Künnes Auffassung zu Folge nicht um einen singulären Term, sondern eben um einen Quantor handelt, darf jedoch angenommen werden, dass das Verstehen in diesem Fall nicht in der Kenntnis einer Identifizierungsregel besteht. Es sei daher im Folgenden davon ausgegangen, dass auch für Künne das Verstehen des numerischen Quantors ‚Es gibt n' darin besteht, zu wissen, wie entsprechende Anzahlaussagen verifiziert werden; also etwa in der Kenntnis der Methode des transitiven Zählens. Nun meint Künne, dass es in Bezug auf die Verwendung von Ziffern als numerische Quantoren einerseits und als singuläre Terme andererseits eine asymmetrische

Verständnisabhängigkeit gäbe. Hiernach müsse zunächst die Verwendung numerischer Quantoren verstanden werden. Die bezugnehmende Verwendung einer Ziffer zu verstehen, sei dann gleichbedeutend damit, die Verwendung des entsprechenden numerischen Quantors zu verstehen. Deshalb, so Künne, wird durch die Erklärung, wie ein numerischer Quantor verwendet werden, ebenfalls erklärt, wie der Bezugsgegenstand der entsprechenden Ziffer identifiziert wird, sobald diese als singulärer Term verwendet wird (1983, S. 185).

Künnes Position stimmt mit der hier Vertretenen in zwei Punkten überein. Zum einen besteht auch nach Künne das Verstehen eines konkreten singulären Terms darin, zu wissen, wie der entsprechende konkrete Bezugsgegenstand identifiziert wird. Zum Anderen ist auch Künne der Ansicht, dass das Identifizieren abstrakter Gegenstände nicht in der Ausführung von Abstraktionsvorgängen bestehen kann (1983, Kap. 4 §3/4). Irrig aber erscheint nun zunächst schon Künnes Idee, den (konstruierten) Abstraktionsvorgang nicht durch einen anderen *Vorgang*, sondern durch das Verstehen abstrakter Terme zu ersetzen. Denn das Verstehen eines Ausdrucks ist eine *Fähigkeit* und damit nicht selbst ein Vorgang, sondern ein Zustand, der sich in bestimmten Vorgängen manifestiert. Nach mythologischer Auffassung sind es die nicht-sinnlichen Anschauungserlebnisse bzw. die entsprechenden Abstraktionsvorgänge, in denen sich das Verstehen manifestiert. Die platonistische Alternative hierzu kann also nur in der Angabe einer anderen *Handlungsweise* bestehen, die zum einen als Manifestation des Verstehens einer Ziffer gelten kann, und die zum anderen als das Identifizieren eines abstrakten Gegenstands beschrieben werden kann.

Nun sind Fähigkeiten nur dann identisch, wenn sie sich in derselben Weise manifestieren. Wenn also, wie Künne meint, das Verstehen von ‚n' als singulärem Term einfach mit dem Verstehen von ‚Es gibt n' zusammenfällt, dann muss sich das Verstehen beider Ausdrücke auch in derselben Weise manifestieren. Aus diesem Grund müsste also das transitive Zählen – oder das Verifizieren von Anzahlaussagen – diejenige Handlung sein, in der sich das Verstehen einer Ziffer als singulärem Term manifestiert, und die damit als das Identifizieren des abstrakten Bezugsgegenstands der Ziffer zu beschreiben wäre. Die von Künne vorgeschlagene Alternative zur mythologischen Konzeption müsste also dahingehend verstanden werden, dass das nicht-sinnliche Anschauen durch das transitive Zählen – und nicht etwa durch das Verstehen – ersetzt wird. Und gegen diese Auffassung erheben sich nun dieselben Einwände wie gegen die auf die Verifikation arithmetischer Aussagen bezogene deflationäre Position. Die Rede von einem Identifizieren eines abstrakten Gegenstands ist auch dann irreführend, wenn hiermit nicht das Umformen arithmetischer Terme, sondern das transitive Zählen konkreter Gegenstände gemeint ist. Denn von den gezählten Gegenständen abgesehen, kommt beim transitiven Zählen kein weiterer Gegenstand ins Spiel. Und wenn ferner die Verwendung von Ziffern nicht nur in den adjektivischen Anzahlaussagen ‚Es gibt F n', sondern auch in den substantivischen Aussagen ‚Die Anzahl der F ist n' durch das transitive Zählen bestimmt ist, dann betrifft Künnes Unterscheidung zwischen der Verwendung von Ziffern als singulären Termen einerseits und als numerischen Quantoren andererseits höchstens die Form entsprechender Aussagen, nicht jedoch die Verwendung der Ziffern.

Wrights bereits in Kapitel 5 diskutierte Position bezieht sich zwar auf Zahlengleichheitsaussagen anstelle von Anzahlaussagen. Sie stimmt jedoch in Wesentlichen Punkten mit Künnes Position überein. So sucht auch Wright nach einer nicht-mythologischen Antwort auf die Frage danach, wie wir Zugang zu abstrakten Gegenständen – insbesondere zu Zahlen – haben können. Er knüpft dabei an Freges Überlegungen dazu an, wie uns abstrakte Gegenstände – wie etwa Richtungen oder eben Zahlen – *gegeben sein* können, wenn wir von ihnen keine Vorstellungen oder Anschauungen haben (Frege 1884, §62). Freges etwas unklare Antwort hierauf ist, dass es hierbei darauf ankomme, den Sinn entsprechender Identitätsaussagen zu bestimmen, also etwa von Aussage der Form ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b'. Diese Idee wird dann von Wright ausbuchstabiert, wobei er auf die heutzutage übliche Terminologie vom Zugang anstatt des Gegebenseins zurückgreift.

Wrights erster und, wie gleich zu erläutern sein wird, entscheidender Schritt besteht darin, die Rede vom Zugang zu einem Gegenstand, welche vom Fall konkretre Gegenstände hergenommen und dort zunächst im Sinn eines Anschaulichmachens zu verstehen ist, dahingehend zu *erweitern*, dass unter dem Zugehen auf einen Gegenstand nun das Verifizieren einer Aussage verstanden wird, die (vermeintlich) von diesem Gegenstand handelt (vgl. Hale/Wright 2005, S. 172). Da Wright ebenso wie Frege allein nach syntaktischen Kriterien darüber entscheidet, ob, und wenn ja, von welchen Gegenständen eine Aussage handelt, geht auch er davon aus, dass eine Richtungsidentität insofern von abstrakten Gegenständen (Richtungen) handelt, als sie genau dann wahr ist, wenn sich die beiden Ausdrücke ‚die Richtung von a' und ‚die Richtung von b' auf denselben Gegenstand beziehen. Nun ist eine Richtungsidentität äquivalent zu entsprechenden Parallelitätsaussage ‚a ist parallel zu b' und kann daher durch die Verifikation *dieser* Aussage verifiziert werden. Und insofern es uns offenbar möglich ist, festzustellen, ob zwei Geraden parallel sind, haben wir in Wrights Sinn also auch Zugang zu Richtungen. Diese Zugangsweise kommt auch ohne mythologische Annahmen aus, da Parallelitätsfeststellungen lediglich auf der sinnlichen Wahrnehmung von Geraden und nicht auf einer nicht-sinnlichen Wahrnehmung von Richtungen beruhen. Dieselbe Überlegung lässt sich dann auch auf Zahlen übertragen. Zugang zu Zahlen zu haben, bedeutet: Identitätsaussagen über Zahlen verifizieren zu können. Und da Anzahlidentitäten der Form ‚Die Anzahl der F ist identisch mit der Anzahl der G' nach Humes Prinzip äquivalent zu Aussagen der Form ‚Es gibt eine 1-1 Beziehung zwischen den F und den G‘ sind, haben wir insofern Zugang zu Zahlen, als wir feststellen können, ob die unter zwei Begriffe fallenden konkreten Gegenstände einander 1-1 zugeordnet sind (oder derart zugeordnet werden können).

Wenn die Rede vom Zugang zu Richtungen und Zahlen in der von Wright vorgeschlagenen Weise durch das Wahrnehmen von Geraden bzw. das 1-1 Zuordnen konkreter Gegenstände *definiert* wird, dann kann man natürlich sagen, dass wir tatsächlich Zugang zu Richtungen und Zahlen haben. Aber wie bereits in Kapitel 4. erläutert wurde, ist diese Definition irreführend, da sie suggeriert, dass es sich bei dem, was geschieht, wenn der Zugang auf konkrete Gegenstände einerseits und abstrakte Gegenstände andererseits verwirklicht wird, um dieselben (oder zumindest ähnliche) Vorgänge bzw. Verhaltensweisen handelt, die nur jeweils auf verschiedene Arten von Gegenständen bezogen werden. Dabei besteht der Unterschied zwischen dem Identifizieren von Geraden einerseits und ihren Richtungen anderseits nicht darin, dass man hierbei jeweils dasselbe mit verschiedenen Gegenständen macht, sondern darin, dass man Verschiedenes mit denselben Gegenständen macht, nämlich Geraden ausfindig machen und sie miteinander vergleichen. Dieser Punkt wird durch Wrights Strategie verdunkelt, die Rede vom Zugang zu Gegenständen, welche, solange es sich noch um Geraden handelt (zumindest von Frege) im Sinn des Anschaulichmachens interpretiert wird, nicht mehr auf eine bestimmte *Art* der Verifikation, sondern auf die bloße *Möglichkeit* der Verifikation zu beziehen, sobald es sich um Richtungen handelt. Ferner ist zu bemerken, dass Wright bei dieser Auffassung des Zugangs der von ihm kritisierten nominalistischen These nicht widersprechen kann, wonach die Wahrheit einer Richtungsidentitätsaussage ‚Die Richtung von a ist identisch mit der Richtung von b‘ neben der Existenz der Bezugsgegenstände von ‚a‘ und ‚b‘ nicht noch die Existenz eine weiteren (abstrakten) Gegenstands voraussetze. Denn wenn eine solche Aussage dadurch – und *nur* dadurch – verifiziert wird, dass festgestellt wird, ob die beiden Geraden parallel sind, auf die ‚a‘ und ‚b‘ sich beziehen, dann hängt der Wahrheitswert dieser Aussage auch nicht von der Existenz eines solchen Gegenstands ab.

Es kann nun ein abschließendes Fazit zu realistischen Erklärungen des arithmetischen Vokabulars – also Erklärungen durch Angaben von Bezugsregeln für Ziffern und Zutreffensregeln für Operationszeichen – gezogen werden. Wenn konkrete Gegenstände als Bezugsgenstände gewählt werden, dann ist zwar die Rede vom Bezug einer Ziffer und die dadurch bestimmte Rede vom Identifizieren des Bezugsgegenstands einer Ziffer nicht anders zu verstehen als die Rede vom Bezug eines Personennamens und dem Identifizieren des Namensträgers. Aber unabhängig davon, welche Gegenstände hierfür gewählt würden, wäre eine realistische Erklärung dieser Art deshalb nicht *verifikationsakkurat*, weil die Wahrheitswerte arithmetischer Aussagen nicht durch das Identifizieren und Untersuchen solcher Gegenstände ermittelt werden, sondern durch das Konstruieren arithmetischer Beweise nach bestimmten syntaktischen Regeln.

Werden die Bezugsgegenstände von Ziffern und arithmetischen Termen dagegen als abstrakt konzipiert, so ergeben sich zwei grundsätzliche Auffassungen der durch die Bezugsregeln kodifizierten Identifizierungs- und Verifikationsregeln. Der mythologische Platonismus ist wesentlich durch das Bestreben motiviert, die Rede vom Bezug und Identifizieren für den Fall arithmetischer Gegenstände in analoger Weise zu interpretieren wie die Rede vom Bezug und Identifizieren konkreter Gegenstände. Hierbei wird also versucht, die Arithmetik als die Beschreibung einer abstrakten Wirklichkeit aufzufassen, welche sich von der Physik (als Beschreibung der raumzeitlichen Wirklichkeit) nur in Hinblick auf die beschriebene Wirklichkeit, nicht jedoch hinsichtlich des Verhältnisses der Zeichen und Sprecher zu der jeweiligen Wirklichkeit unterscheidet. Dieses Bestreben erzwingt dann die Konstruktionen von Abstraktionsvorgängen und nicht-sinnlichen Anschauungen als Analoga zum Ausfindigmachen und Anschauen konkreter Gegenstände. Der Einwand gegen diese Konzeption lautete, dass sich die Verwendung arithmetischer Aussage durch solche nicht-sinnliche Anschauungen nicht regulieren lässt, weil niemals feststellbar ist, was jemand in dieser Weise anschaut. Deshalb könnten selbst dann, wenn solche Abstraktions- und Anschauungsvorgänge simultan zu den Konstruktionen arithmetischer Beweise stattfänden, nur die Ergebnisse dieser Konstruktionsvorgänge zu Bedingungen für die Wahrheit und Falschheit arithmetischer Aussagen gemacht werden.

Wer daran festhält, dass Ziffern sich auf abstrakte Gegenstände beziehen, jedoch gleichzeitig die Annahme einer auf diese Gegenstände bezogenen Anschauungsweise verwirft, scheint auf den in diesem Abschnitt diskutierten deflationären Platonismus festgelegt zu sein, wonach das Identifizieren der abstrakten Gegenstände der Arithmetik mit dem Umformen arithmetischer Terme identifiziert wird. Wie zuvor erläutert wurde, stellt diese Konzeption jedoch keine alternative Position zum Nominalismus, sondern lediglich eine alternative und potentiell irreführende Formulierung dieser Position dar. Die Rede vom Identifizieren abstrakter Gegenstände und mit ihr die Rede vom Bezug auf abstrakte Gegenstände sollte aufgegeben werden, weil es keine Handlungsweisen gibt, welche durch Erstere angemessen beschrieben oder durch Letztere angemessen kodifiziert wird.

8.6 In diesem Abschnitt sollen die anti-nominalistischen Argumente untersucht werden, welche entweder bereits auf der Annahme des Platonismus beruhen oder aber als Gründe für den Platonismus angeführt werden. Als Ausgangspunkt für diese Untersuchung soll zunächst eine knappe Diskussion von Benacerrafs bekanntem Dilemma dienen, da dieses sich aus den

Erwägungen des grundsätzlichen Für und Wider platonistischer und nominalistischer Konzeptionen der Arithmetik – oder allgemeiner: der Mathematik – ergibt (vgl. Benacerraf 1973).

Auch Benacerraf unterscheidet zwischen realistischen Konzeptionen arithmetischer Aussagen einerseits und syntaktisch-kombinatorischen Konzeptionen – unter welche auch die in den Kapiteln 6 und 7 entwickelte nominalistische Auffassung fallen würde – andererseits. Dabei geht er davon aus, dass arithmetischer Realismus nur im Sinn des Platonismus zu verstehen ist. Diese Annahme soll daher auch in der folgenden Diskussion stets unterstellt werden. Benacerraf meint nun, dass die Begriffe der *Wahrheit* und des *Wissens* in Bezug auf alle Arten von Aussagen in einheitlicher Weise aufgefasst werden müssen. Aus dieser Überlegung leitet er dann zwei Adäquatheitsbedingungen für Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetische Aussagen ab, welche im Folgenden als die metaphysische und die epistemologische Adäquatheitsbedingung bezeichnet seien. Hiernach sind Wahrheitsbedingungsangaben arithmetischer Aussagen nur dann *metaphysisch* adäquat, wenn sich die hierdurch bestimmte Konzeption arithmetischer Wahrheit als Spezialfall einer allgemeinen Wahrheitskonzeption auffassen lässt, in welche sich auch empirische Wahrheit (als ein weiterer Spezialfall) integrieren lässt (1973, S. 666). Nach Benacerraf können nur realistische Wahrheitsbedingungsangaben in diesem Sinn adäquat sein, weil im Fall empirischer Aussagen realistische Wahrheitsbedingungsangaben alternativlos zu sein scheinen. Eine für empirische und arithmetische Aussagen einheitliche Wahrheitskonzeption schließt eine kombinatorische Auffassung arithmetischer Wahrheit also deshalb aus, weil empirische Wahrheit nicht kombinatorisch, sondern nur realistisch aufzufassen ist.

Andererseits sind Wahrheitsbedingungsangaben arithmetischer Aussagen nur dann *epistemologisch* adäquat, wenn sie die *Kenntnis* arithmetischer Wahrheiten nicht grundsätzlich ausschließen. In diesem Sinn sind Wahrheitsbedingungsangaben also nur dann adäquat, wenn es möglich ist, festzustellen, ob die angegebenen Wahrheitsbedingungen erfüllt sind (1973, S. 667). Nach Benacerraf wären nun zwar kombinatorische Wahrheitsbedingungsangaben epistemologisch adäquat, da die Kenntnis kombinatorischer Wahrheiten unproblematisch ist. Die Unzugänglichkeit abstrakter Gegenstände schließe jedoch die Kenntnis platonistischer Wahrheiten und damit die epistemologische Adäquatheit platonistischer Wahrheitsbedingungen aus. Realistische Wahrheitsbedingungsangaben erscheinen nur in Bezug auf empirische Aussagen epistemologisch adäquat; also nur dann, wenn die Gegenstände, von denen die fraglichen Aussagen handeln, raumzeitlicher Art sind. Nach Benacerraf ergibt sich somit das Dilemma, dass Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetische Aussagen nicht sowohl metaphysisch als auch epistemologisch adäquat sein können.

Es sei an dieser Stelle noch rasch auf ein mögliches Missverständnis hinsichtlich der epistemologischen Unadäquatheit des Platonismus hingewiesen. Ob Tait in seinem ansonsten in vielerlei Hinsicht erhellenden Aufsatz ‚Truth and Proof' (1986) tatsächlich diesem Missverständnis anheimfällt, ist nur schwer mit Sicherheit zu sagen. Zumindest aber legt er in Abschnitt 3 dieses Aufsatzes nahe, dass Benacerrafs These der epistemologischen Unadäquatheit des Platonismus auf einen Skeptizismus bezüglich arithmetischer Beweise hinauslaufe. Dieses Problem, so Tait, sei jedoch kein spezifisch arithmetisches, sondern ließe sich auch auf empirische Aussagen übertragen, insofern man aus mehr oder weniger denselben Gründen einen Skeptizismus bezüglich Sinneswahrnehmungen vertreten könne. Die Bedenken gegen die epistemologische Adäquatheit realistischer Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetische Aussagen seien demnach nicht plausibler als Bedenken gegen die epistemologische Adäquatheit realistischer Wahrheitsbedingungsangeben für empirische Aussagen.

Hiergegen ist zunächst darauf hinzuweisen, dass auch empirische Aussagen als Prämissen und Konklusionen in Argumenten bzw. Beweisen auftreten können, so dass es in Bezug auf diese Aussagen also beides gibt: Argument *und* wahrnehmungsbasierte Verifikation. Wird nun die auch von Tait abgelehnte Möglichkeit der nicht-sinnlichen Wahrnehmung abstrakter Gegenstände verworfen (vgl. 1986, S. 346), dann unterscheiden sich die arithmetischen Aussagen also darin von den Empirischen, dass Beweise (Argumente) die einzige Evidenz bilden, die für ihre Wahrheit angeführt werden kann. Der Gegensatz zwischen Empirie und Arithmetik besteht also nicht im dem Gegensatz zwischen Sinneswahrnehmung und Beweis. Er besteht vielmehr in dem Gegensatz zwischen Argument und Sinneswahrnehmung einerseits und dem bloßen Argument – und der Abwesenheit von Wahrnehmungen – andererseits.

Die skeptizistische Schwierigkeit des Platonismus ergibt sich nun aus der Überlegung, dass – zumindest im empirischen Fall – ein Argument *allein* noch nicht zeigt, dass seine Konklusion wahr ist, sondern nur, dass die Konklusion unter der Bedingung wahr ist, dass auch die Prämissen des Arguments wahr sind. Die Konklusion bleibt also solange eine bloße Hypothese, als nicht die Wahrheit der Prämissen festgestellt wurde. Im empirischen Fall ergibt sich hieraus kein Problem, da sich zumindest bestimmte empirische Aussagen durch Sinneswahrnehmung verifizieren lassen. Ohne das Analogon einer nicht-sinnlichen Wahrnehmung abstrakter Gegenstände ist aber genau diese Möglichkeit im arithmetischen Fall ausgeschlossen. Wenn nun die kombinatorische Auffassung abgelehnt wird, der zu Folge die Wahrheit einer arithmetischen Aussage bereits in ihrer Ableitbarkeit besteht, dann bleiben arithmetische Aussagen also immer nur bloße Hypothesen. Denn die Wahrheit der grundlegenden arithmetischen Prämissen (Axiome) kann weder durch Beweise, noch durch Wahrnehmungen festgestellt werden. Benacerrafs Skeptizismus bezieht sich also weder auf Sinneswahrnehmungen, noch auf Beweise. Er bezieht sich zunächst allein auf die auch von Tait abgelehnte Annahme einer nicht-sinnlichen Wahrnehmung abstrakter Gegenstände. Und die sich hieraus für den Platonismus ergebende Schwierigkeit besteht darin, dass der Übergang von den kombinatorischen Wahrheiten, die durch die Konstruktionen arithmetischer Beweise festgestellt werden, zu den platonistischen Wahrheiten, deren Feststellungen solche Wahrnehmungen zu erfordern scheinen, durch nichts gerechtfertigt zu sein scheint.

Dieser Einwand kann noch mit dem Hinweis darauf verschärft werden, dass die Unmöglichkeit der Wahrnehmung abstrakter Gegenstände *begrifflicher* Art zu sein scheint, und das daher die Rede von solchen Wahrnehmungen sinnlos ist. Denn wenn eine Verifikation arithmetischer Aussagen begrifflich ausgeschlossen ist, können diese auch nicht als Hypothesen – also als Annahmen, die der Verifikation harren – aufgefasst werden. Und ebenso wenig kann dann das Beweisen arithmetischer Aussagen als ein Schließen von Hypothesen auf Hypothesen verstanden werden. Aus der Annahme der begrifflichen Unmöglichkeit einer Verifikation arithmetischer Aussagen im platonistischen Sinn ergibt sich dann also im Prinzip schon die kombinatorische Auffassung der Arithmetik. Denn ohne den vermeintlichen Zusammenhang der arithmetischen Beweise zu den eigentlichen Verifikationen arithmetischer Aussagen zeigt ein Beweis auch nichts anderes als seine eigene Konstruierbarkeit bzw. die Konstruierbarkeit der bewiesenen Aussage. Benacerrafs Einwand gegen die epistemologische Adäquatheit des Platonismus kann also unter der Bedingung als reductio ad absurdum dieser Position aufgefasst werden, dass die Unzugänglichkeit abstrakter Gegenstände im Sinn einer begrifflichen Unmöglichkeit – und nicht etwa im Sinn einer Beschränkung unserer kognitiven Fähigkeiten – interpretiert wird.

Nun zu der Frage, in wie weit die kombinatorische Konzeption der Arithmetik tatsächlich metaphysisch inadäquat ist! Hierfür sei zuerst an die Diskussion des Wahrheitsbegriffs in Abschnitt 1.1 erinnert. Dort wurde zunächst der Sprechakt der Behauptung durch Bezug auf zwei grundlegende Sprach- bzw. Behauptungsspiele charakterisiert. Zum einen das Erzeugungsspiel, dessen Praktizierung darin besteht, eine Aussage zu äußern – und also behaupten –, unmittelbar nachdem festgestellt wurde, dass eine Äußerung der Aussage korrekt ist. Und zum anderen das auf Tugendhat (1976, Kap. 15) zurückgehende Entscheidungsspiel, dessen Praktizierung darin besteht, dass eine Aussage zunächst geäußert wird, um diese Äußerung dann in Abhängigkeit einer darauffolgenden Feststellung ihrer Korrektheit durch eine weitere Äußerung zu bekräftigen oder zurückzunehmen. Durch Bezug auf diese beiden grundlegenden Behauptungsspiele wurde die Rede von der Wahrheit einer Aussage im Sinne von deren Behauptbarkeit expliziert. Zu sagen, eine Aussage ‚p' sei wahr, bedeutet hiernach: zu sagen, dass es korrekt wäre, die Aussage zu äußern bzw. einer solchen Äußerung zuzustimmen. Und zu sagen, eine Aussage sei falsch, bedeutet: zu sagen, dass es inkorrekt wäre, sie äußern, bzw. dass eine entsprechende Äußerung zurückzunehmen wäre. Insofern diese Erklärung des

Wahrheitsbegriffs nicht voraussetzt, *wovon* die Wahrheitswerte (also die Äußerungskorrektheit) bestimmter Aussagen abhängen, impliziert sie auch nicht, dass sich diese Abhängigkeiten für arithmetische und empirische Aussagen in analoger Weise darstellen müssen. Die einzige Gemeinsamkeit zwischen arithmetischen und empirischen Aussagen, welche dieser Wahrheitsbegriff voraussetzt, bezieht sich auf den *Sprechakt* der Behauptung bzw. auf die entsprechenden Sprachspiele.

Wenn die Rede von der Wahrheit einer Aussage in dieser Weise als deren Behauptbarkeit aufgefasst wird, dann müssen als Wahrheitsbedingungen einer Aussage diejenigen Bedingungen angegeben werden, deren Erfülltsein festgestellt wird, wenn festgestellt wird, ob die eine Äußerung der Aussage zurückzunehmen ist oder nicht. Die in dieser Weise ermittelten Wahrheitsbedingungsangaben sind demnach in jedem Fall epistemologisch adäquat in Benacerrafs Sinn, insofern sie durch eine Reflektion auf die Regeln bestimmt werden, denen man tatsächlich folgt, wenn man feststellt, ob entsprechende Äußerungen zurückgenommen werden müssen. Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit erläutert wurde, ergeben Reflektionen dieser Art zwar realistische Wahrheitsbedingungsangaben für empirische Aussagen. Denn ob Äußerungen dieser Aussagen zurückgenommen werden müssen oder nicht, wird durch Untersuchungen bestimmter nicht-sprachlicher Gegenstände festgestellt. Sie führen jedoch im Fall arithmetischer Aussagen zu syntaktisch-kombinatorischen Wahrheitsbedingungsangaben. Denn wie Kapitel 6 erläutert wurde, wird etwa in der Weise festgestellt, ob die Äußerung einer arithmetischen Gleichung zurückgenommen werden muss, dass festgestellt wird, ob sich die beiden Terme in ein und dieselbe Ziffer umformen lassen.

Der Unterschied zwischen empirischen und arithmetischen Aussagen besteht somit in der Art und Weise, wie Aussagen beider Arten verifiziert werden. Und in diesem Sinn könnte man auch – mit Benacerraf – jeweils von unterschiedlichen Wahrheitsbegriffen sprechen: einem Realistischen für empirischen Aussagen und einem Kombinatorischen für arithmetische Aussagen. Durch Bezug auf den Sprechakt der Behauptung kann aber dennoch in einheitlicher Weise begründet werden, dass in beiden Fällen von Wahrheit die Rede ist. Denn auch wenn sich die auf empirische Aussagen bezogenen Verifikationshandlungen grundsätzlich von den auf arithmetische Aussagen bezogenen Verifikationshandlungen unterscheiden, so sind dennoch die aus diesen Handlungen gezogenen Konsequenzen jeweils dieselben, nämlich die Rücknahme oder Bekräftigung entsprechender Äußerungen. Benacerrafs anti-nominalistischer Einwand gegen die metaphysischer Adäquatheit kombinatorischer Wahrheitsbedingungsanagaben für arithmetische Aussagen erscheint also unzutreffend.

Nun meint Benacerraf, dass es auch abgesehen von der vermeintlichen metaphysischen Adäquatheit der platonistischen Auffassung der Arithmetik derart gute Argumente für diese

Konzeption gäbe, dass kombinatorische Auffassungen im Prinzip nicht ernsthaft diskutabel wären (1973, S. 669). Und mit dieser Ansicht ist er nicht allein (vgl. z.B. Burgess/Rosen 2005, S. 523-525). Zunächst scheint es jedoch, dass es nicht viele, sondern eigentlich nur *ein* Argument für realistische Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetische Aussagen gibt, und das ist die These der Bereichsneutralität des logischen Vokabulars. Denn auch alle anderen, populären Platonismusargumente scheinen entweder mittelbar oder unmittelbar auf die Annahme zurückzuführen zu sein, dass die sogenannten logischen Konstanten – also Junktoren, Quantoren und das Identitätszeichen – in empirischen und arithmetischen Aussagen dieselbe Bedeutung haben.

Mittelbar auf die Bereichsneutralitätsthese bezieht sich etwa der Verweis darauf, dass arithmetische Aussagen scheinbar dieselbe *logische Form* wie bestimmte empirische Aussagen haben. Denn das, was hierbei ‚logische Form' genannt wird, ist durch das Vorkommen der logischen Konstanten bestimmt. Wenn also etwa mit dem Hinweis auf die gemeinsame logische Form arithmetischen Gleichungen und empirischen Identitätsaussagen dafür argumentiert wird, dass eine arithmetische Gleichung ‚$T_1=T_2$' zu sagen scheint, dass sich ‚T_1' und ‚T_2' auf denselben Gegenstand beziehen, so ist hierbei vorausgesetzt, dass ‚=' in diesem Kontext dasselbe bedeutet wie ‚ist identisch mit' in empirischen Kontexten. Und analog hierzu beruht die Idee, dass eine arithmetische Existenzaussage wie etwa ‚Es gibt eine natürliche Zahl n derart, dass $n^2=16$' zu sagen scheint, dass einen Gegenstand gibt, auf den ‚$n^2=16$' zutrifft, auf der Annahme, dass der Ausdruck ‚Es gibt' in arithmetischen und empirischen Kontexten dasselbe bedeutet.

Unmittelbar aus der Bereichsneutralitätsthese ergibt sich ferner das Argument, welches sich in mehr oder weniger ausdrücklicher Form auch bei Benacerraf findet (1973, S. 670), dass sich unter dieser Annahme die Wahrheitsbedingungsangaben für eine Sprache, in der sich sowohl arithmetische als auch empirische Aussagen bilden lassen, wesentlich vereinfachen. Gegen dieses Argument erhebt sich allerdings direkt der Einwand, dass es sich bei der fraglichen *Einfachheit* bestenfalls um eine Sekundärtugend von Wahrheitsbedingungsangaben handeln kann. Primär muss die Adäquatheit von Wahrheitsbedingungsangaben – und damit insbesondere die Adäquatheit der Bedeutungserklärungen der sogenannten logischen Konstanten – natürlich durch Bezug auf die Verwendung der entsprechenden Aussagen bewertet werden. So muss insbesondere eine Untersuchung der Verwendung der logischen Konstanten zeigen, ob diese Ausdrücke in allen Kontexten in derselben Weise verwendet werden.

Dass die Verwendung der logischen Konstanten nicht bereichsneutral ist, ist von Philosophen der normalen Sprache auch oft genug betont worden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde vorgeschlagen, dass sich die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in der Verwendung des Identitätszeichens – und auch der Quantoren – durch Bezug auf die zwei Dimensionen des

Verifizierens und des *Schließens* darstellen lassen. So ist zunächst zwar die Logik des arithmetischen Gleichheitszeichens – zumindest in etwa – dieselbe wie die des empirischen Identitätszeichens, insofern man innerhalb arithmetischer Gleichungen nach denselben Gesetzen (also Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) schließen kann wie innerhalb empirischer Identitätsaussagen. Dennoch unterscheidet sich die Verifikation arithmetischer Gleichungen natürlich erheblich von der Verifikation empirischer Identitätsaussagen. Denn während die Wahrheitswerte Letzterer durch das Identifizieren (Ausfindigmachen) bestimmter raumzeitlicher Gegenstände ermittelt werden, wird die Wahrheit oder Falschheit Ersterer allein durch das Umformen von Ausdrücken festgestellt.

Für eine Bewertung der Adäquatheit von Wahrheitsbedingungsangaben muss also zunächst bestimmt werden, welche Verwendungsaspekte durch diese Angaben dargestellt werden sollen. Eine Möglichkeit besteht natürlich darin, dass man das Ziel von Wahrheitsbedingungsangaben darauf beschränkt, darzustellen, in welcher Weise die Wahrheitswerte bestimmter Aussagen von den Wahrheitswerten anderer Aussagen abhängen. Wird die Adäquatheit von Wahrheitsbedingungsangaben für arithmetischer Aussagen nur in dieser Weise, d.h. also nur in Hinblick auf deren *Implikationsakkuratheit* bewertet, so spräche das zwar nicht schon für die eine oder andere Konzeption. Aber es wäre eventuell irrelevant, ob man die Wahrheitsbedingungen im kombinatorischen oder im platonistischen Sinn formuliert. Wenn es jedoch als das Ziel von Wahrheitsbedingungsangaben betrachtet wird, darzustellen, wovon die Wahrheitswerte der entsprechenden Aussagen abhängen, dann müssen Wahrheitsbedingungsangaben diejenigen Bedingungen angeben, deren Erfülltsein man feststellt, wenn man die Wahrheitswerte der fraglichen Aussagen ermittelt. Und wenn diese Form der *Verifikationsakkuratheit* gefordert wird, dann kommen für arithmetische Aussagen nur noch kombinatorische Wahrheitsbedingungsangaben in Frage.

8.7 In diesem Abschnitt soll nur nun zuletzt Wittgensteins *Autonomiethese* bewiesen und durch eine Diskussion von Dummetts Einwänden erläutert werden. Wie bereits mehrfach erläutert wurde, sind arithmetische Aussagen Konstruierbarkeitsaussagen. Denn sowohl eine einfache arithmetische Gleichung als auch eine einem arithmetischen Gesetz entsprechende algebraische Gleichung ist genau dann wahr, wenn sie bzw. eine ihr entsprechende Beweisfigur sich nach bestimmten syntaktischen Regeln konstruieren lässt. Hierbei lässt sich die von einer solchen Aussage behauptete Konstruktionsmöglichkeit *konditional* formulieren: *wenn* man den Konstruktionsregeln folgt, *dann* erhält man einen Beweis der Aussage.

Die Verifikation arithmetischer Gleichungen ist in dem Sinn *algorithmischer* Art, dass hierbei jeweils (mehr oder weniger) eindeutig bestimmt ist, in welcher Reihenfolge welche

Umformungsregeln zu befolgen sind. Wie bereits mehrfach erläutert wurde, besteht etwa die Verifikation einer aus einem Term ‚T' und einer Ziffer ‚z' gebildeten Gleichung darin, die in ‚T' enthaltenen Operationszeichen in der durch die Klammern in ‚T' vorgeschriebenen Reihenfolge zu eliminieren. Jeder arithmetischen Gleichung entspricht somit ein aus der Gleichung selbst ablesbares Lösungsverfahren. Und was eine solche Gleichung behauptet, ist also, dass man zu einem Beweis der Gleichung gelangt, wenn man *ihr* Lösungsverfahren befolgt. Die Verifikation algebraischer Gleichungen oder die einer Aussage eines axiomatischen Kalküls ist zumeist nicht in diesem Sinn algorithmisch. So schreibt etwa der algebraische Term ‚$(a+b)^2$' nicht vor, in welcher Reihenfolge welche Umformungsregeln auf ihn anzuwenden sind, um festzustellen, ob er sich in einer algebraischen Gleichungskette mit dem Term ‚$a^2+2ab+b^2$' verbinden lässt. Die Gleichung ‚$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$' behauptet daher nur, dass es *ein* Verfahren gibt, dass zu ihrem Beweis führt, ohne dieses Verfahren jedoch selbst anzugeben. Um auch eine solche algebraische Gleichung als Behauptung dafür aufzufassen, dass die Befolgung eines *bestimmten* Lösungsverfahrens zu ihrem Beweis führt, müsste dieses Verfahren also im Prinzip zusätzlich angegeben werden. Der Einfachheit halber sei im Folgenden von dieser Schwierigkeit jedoch abgesehen und der einfache Fall der Verifikation einer aus einem arithmetischen Term ‚T' und einer Ziffer ‚z' gebildeten Gleichung als exemplarisch betrachtet.

Offenbar verweist die konditionale Formulierung der Wahrheitsbedingungen arithmetischer Aussagen auf eine Ähnlichkeit zu bestimmten empirischen Aussagen. Denn wie in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, lassen sich etwa auch die Wahrheitsbedingungen einer Längenaussage der Form ‚a ist 1 Meter lang' durch das Folgende Konditional formulieren: *wenn* man *a* und das Urmeter aneinander legt, *dann* decken sie einander wechselseitig. Wittgenstein folgend kann nun der Unterschied zwischen mathematischer und empirischer Wahrheit durch Bezug auf die Unterscheidung zwischen den entsprechenden Verifikationsvorgängen *Beweis* und *Experiment* operational erläutert werden.

Zunächst können zwei Gemeinsamkeiten von Rechnung und Experiment festgehalten werden. Zum einen sind Vorgänge beider Art *wiederholbar*. Sowohl eine arithmetische Aussage als auch eine Längenaussage ist demnach zu verschiedenen Zeitpunkten verifizierbar. In diesem Punkt unterscheiden sie sich etwa von einer Aussage der Art ‚a ist zwischen t_0 und t_1 jederzeit 1 Meter lang', deren Verifikation darin besteht, zwischen t_0 und t_1 verschiedene Längenmessungen an *a* vorzunehmen. Hierbei wird also zwar die Verifikation von ‚a ist 1 Meter lang' mehrfach wiederholt. Eine Wiederholung der Verifikation der Aussage ‚a ist zwischen t_0 und t_1 jederzeit 1 Meter lang' ist jedoch wegen deren Bezugs auf ein bestimmtes Zeitintervall ausgeschlossen. Eine weitere allerdings nur eingeschränkte Gemeinsamkeit von Rechnung und Experiment besteht darin, dass das Ergebnis eines bestimmten Rechenvorgangs zumindest vor der erstmaligen

Durchführung einer Rechnung der entsprechenden Art ebenso *unbekannt* sein kann, wie es das Ergebnis eines Experiments vor jeder seiner Durchführungen ist (BGM, III 69).

Der grundlegende Unterschied zwischen Rechnung und Experiment besteht nun darin, dass nur im Fall eines Experiments die Möglichkeit zugelassen wird, dass die Durchführung ein und desselben Experiments bei verschiedenen Gelegenheiten zu verschiedenen Resultaten führt. Wenn also etwa zwei Messungen von *a* zu verschieden Zeitpunkten zu verschiedenen Längen führen, gilt dieser Umstand nicht als Kriterium dafür, dass eine der beiden Messungen fehlerhaft durchgeführt wurde. Im Gegensatz dazu steht im Fall einer Rechnung auch schon vor deren erster Durchführung fest, dass je zwei Durchführungen der Rechnung bei verschiedenen Gelegenheiten zu ein und demselben Ergebnis führen müssen. Das bedeutet also, dass die Identität der Resultate zweier Durchführungen ein und derselben Rechnung als Kriterium (notwendige Bedingung) dafür gilt, dass beide Rechenvorgänge fehlerfrei durchgeführt wurden. Der zweite hieraus abgeleitete Unterschied zwischen Rechnung und Experiment besteht demnach darin, dass nach der einmaligen fehlerfreien Durchführung einer Rechnung das hierbei ermittelte Ergebnis als Kriterium für die Fehlfreiheit anderer Rechenvorgänge gilt. Wenn also jemand bei einer anderen Gelegenheit ein anderes Ergebnis erhält, so wird darauf geschlossen, dass er sich verrechnet hat.

Man kann also sagen, dass der entscheidende Unterschied zwischen Rechnung und Experiment darin besteht, dass nur im ersten Fall die *Eindeutigkeitsregel* gilt, wonach die Rechenbedingung – also die Bedingung, dass die Rechenregeln angewendet werden – nur dann bei zwei verschiedenen Gelegenheiten erfüllt ist, wenn sich beide Male dieselbe Konsequenz – also dasselbe Rechenergebnis – ergibt. Bei dieser Eindeutigkeitsregel handelt es sich nicht um eine weitere Konstruktionsregel neben den eigentlichen Rechenregeln, sondern eine aus diesen Regeln ableitbare Regel. Die *Geltung* der Eindeutigkeitsregel – also die Möglichkeit derart zu schließen – kann durch Bezug auf die Rechenregeln (zumindest ein Stück weit) erläutert werden. Hierfür ist zunächst zu bemerken, dass zwei Ausführungen derselben Rechnung nicht nur in ihren Endresultaten, sondern auch in all ihren Zwischenschritten miteinander übereinstimmen müssen. Die auf das Resultat bezogene Eindeutigkeit ist also auf die Eindeutigkeit der einzelnen Rechenschritte zurückführbar; im Fall des Beweises einer arithmetischen Gleichung also auf die im Beweis vollzogenen Übergänge von einem Term zum Nächsten. Und die Eindeutigkeit dieser Übergänge ist gleichbedeutend mit der in Abschnitt 6.2 erläuterten Typinvarianz der grundlegenden syntaktische Relationen der Konkatenation und der Substitution.

In Abschnitt 3.1 wurde zwischen der Geltung einer Regel und deren *in-Kraft-sein* innerhalb einer bestimmten Sprachgemeinschaft unterschieden. In diesem Zusammenhang wurde darauf hingewiesen, dass auch gültige Regeln außer Kraft sein können, solange die fraglichen Sprecher die Geltung der Regel – also deren Ableitbarkeit aus anderen Regeln, die in Kraft sind – nicht bemerken. Diese Möglichkeit besteht nun auch in Bezug auf die Eindeutigkeitsregel. D.h.: es ist möglich, dass die Mitglieder einer bestimmten Gemeinschaft zwar Beweisfiguren nach den arithmetischen Umformungsregeln konstruieren, aber dennoch nicht die Eindeutigkeit der Rechenresultate fordern, sondern eventuell bloß als eine Tatsache konstatieren. Der Unterschied zwischen uns und diesen Leuten bestünde also in einer Verschiedenheit der Einstellungen gegenüber dem Konstruieren der fraglichen Zeichenfiguren. Und wie im nächsten Kapitel noch näher zu erläutern sein wird, könnte man deshalb sagen, dass die Konstruktionsvorgänge dieser Leute aufgrund dieser Einstellung nicht als ein Rechnen (oder: Beweisen), sondern eher als ein Experimentieren zu bezeichnen wäre. Denn wie zuvor erläutert, ist es das in-Kraft-sein der Eindeutigkeitsregel, was das Rechnen vom Experimentieren unterscheidet.

Nun zu den Konsequenzen, welche sich aus der Geltung der Eindeutigkeitsregel für die Charakterisierung der Verwendung arithmetischer Aussagen ergeben! Ein erstes durch die Eindeutigkeitsregel bestimmtes Verwendungsmerkmal arithmetischer Aussagen ist deren *Zeitlosigkeit*. Im Gegensatz etwa zu der einfachen Längenaussage ‚a ist 1 Meter lang' ist eine arithmetische Aussage in dem Sinn zeitlos, dass sie zu jeden Zeitpunkt denselben Wahrheitswert hat. Es ist hierbei darauf hinzuweisen, dass natürlich auch all diejenigen empirischen Aussagen zeitlos sind, deren Verifikation nicht wiederholbar ist, also etwa Aussagen der Form ‚a ist zwischen t_0 und t_1 jederzeit 1 Meter lang'. Dagegen ergibt sich die Zeitlosigkeit einer arithmetischen Aussage daraus, dass deren Verifikation zwar immer und überall wiederholbar ist, jedoch nach der Eindeutigkeitsregel stets zu demselben Ergebnis führen muss.

Die Rede von der *Notwendigkeit* einer arithmetischen Aussage im Gegensatz zur Kontingenz einer empirischen Aussage ist als Ausdruck der Eindeutigkeitsregel zu verstehen. Zunächst verweist die modale Rede davon, dass bei einem bestimmten Rechenvorgang ein bestimmtes Ergebnis nicht nur herauskommt, sondern herauskommen *muss*, über den Rechenvorgang hinaus auf andere Vorgänge derselben Art. Dies jedoch nicht im Sinn einer empirischen Verallgemeinerung derart, dass sich das fragliche Resultat nicht nur hier und jetzt, sondern immer und überall ergibt. Denn sollte sich bei einer anderen Gelegenheit tatsächlich ein anderes Resultat ergeben, dann wird nicht die ursprüngliche Aussage, wonach das erste Resultat herauskommen muss, zurückgenommen, sondern es wird gemäß der Eindeutigkeitsregel auf die Fehlerhaftigkeit des zweiten Vorgangs geschlossen. Ein Ausdruck wie ‚13×13 *muss* 169 ergeben' ist also keine *Vorhersage*, sondern eine *Regel*, die besagt, dass sich verrechnet hat, wer bei der Berechnung von 13×13 nicht 169 erhält. Im Gegensatz zu der Formulierung ‚13×13 ergibt 169', welche auch im experimentellen Sinn als ‚13×13 ergibt hier und jetzt 169' gedeutet werden könnte, macht die Formulierung ‚13×13 muss 169 ergeben' die Annahme der Eindeutigkeitsregel und damit die rechnerische Einstellung zu der fraglichen Zeichenkonstruktion explizit (BGM, VI 7). Es ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, dass mit Annahme der Eindeutigkeitsregel die Notwendigkeit des Rechenergebnisses auch schon vor der Durchführung der Rechnung feststeht. Auch bevor er das Ergebnis einer bestimmten Rechnung ermittelt, steht für den Rechnenden der Entschluss fest, dass Ergebnis, das er erhalten wird, anschließend als Kriterium für die fehlerfreie Durchführung der Rechnung zu benutzen.

Aufgrund der Eindeutigkeitsregel ist im Fall einer arithmetischen Aussage das Erhalten eines bestimmten Wahrheitswertes ein Kriterium für die Korrektheit der Verifikation der fraglichen Aussage. Da die Wahrheitswerte arithmetischer Aussagen demnach allein durch deren Wahrheitsbedingungen bestimmt sind, sind arithmetische Aussagen in dem in Abschnitt 2.1 bestimmten Sinn *analytisch*. Wittgensteins *Autonomiethese*, der zu Folge arithmetische Aussage nicht die Wirklichkeit beschreiben, kann somit als bewiesen gelten. Die von der Autonomiethese behauptete Wirklichkeitsunabhängigkeit arithmetischer Aussagen kann also durch zwei Verwendungscharakteristika erläutert werden: dem Umstand, dass arithmetische Aussagen Konstruierbarkeitsaussagen sind einerseits, und der Geltung auf der auf die entsprechenden Konstruktionen bezogenen Eindeutigkeitsregel andererseits. Zum einen sind die Wahrheitswerte arithmetischer Aussage nicht von der Beschaffenheit vermeintlicher Bezugsgegenstände der Ziffern abhängig, da die Verifikation arithmetischer Aussage darin besteht, entsprechende Beweisfiguren *allein* nach bestimmten syntaktischen Regeln zu konstruieren. D.h.: Jeder Schritt in der über die Wahrheit einer arithmetischen Aussage entscheidenden Beweiskonstruktion ist nur durch eine Untersuchung der Form bestimmter arithmetischer Ausdrücke reguliert und nicht etwa durch eine Untersuchung irgendwelcher Bezugsgegenstände dieser Ausdrücke. Deshalb ist, wie Wittgenstein schon in LPA 6.233 zu Recht bemerkt, die Anschauung der arithmetischen Zeichen die einzige Anschauung, derer der Mathematiker bedarf. Zum anderen schließt die Eindeutigkeitsregel die einzige für Konstruierbarkeitsaussagen zumindest prinzipiell noch in Frage kommende Form der Wirklichkeitsabhängigkeit aus: nämlich deren Situationsrelativität. Denn wenn die Eindeutigkeit der Konstruktionsergebnisse gleicher Konstruktionsvorgänge gefordert wird und die Konstruktionsvorgänge damit als Rechnungen und nicht als Experimente behandelt werden, dann entfällt auch die für Experimente wesentliche Möglichkeit verschiedener Ausgänge in verschiedenen Situationen.

In Abschnitt 3.4 wurde erläutert, dass anstelle von ‚analytisch wahr' auch der Ausdruck ‚allein per Konvention wahr' verwendet werden könnte, da es sich bei den Wahrheitsbedingungen bzw. Verifikationsregeln, welche im Fall analytischer Aussagen deren Wahrheitswerte bereits bestimmen, um Konventionen handelt. Wittgensteins Autonomiethese kann deshalb mit gewissem Recht als eine Form des *Konventionalismus* betrachtet werden. Auch

Dummett interpretiert in seinem einflussreichen Artikel (1959) Wittgensteins Position als konventionalistisch und kritisiert diese durch Bezug auf ein Dilemma, das sich laut Dummett für alle konventionalistischen Auffassungen mathematischer Wahrheit stellt.

Davon ausgehend, dass mathematische Aussagen im Unterschied zu Empirischen nicht kontingent, sondern notwendig sind, stellen sich nach Dummett die Fragen danach, wie der *Status* und die *Erkenntnis* dieser notwendigen Wahrheiten zu verstehen sind. Dabei bezieht sich Dummett in seinen Darstellungen auf axiomatische Kalküle; d.h. also auf Kalküle, deren Aussagen unterschieden werden können in Axiome und in Aussagen, die aus den Axiomen nach bestimmten Schlussregeln ableitbar (konstruierbar) sind oder nicht. Nach Dummett könne man nun zwar eventuell von den Axiomen und Ableitungsregeln sagen, sie seien *per Konvention* wahr, insofern diese (mehr oder weniger) willkürlich *festgesetzt* sind. Für eine konventionalistische Charakterisierung der aus den Axiomen ableitbaren Aussagen – also der Theoreme – ergibt sich nach Dummett jedoch die folgende Schwierigkeit. Entweder wird zugegeben, dass wir die Wahrheit der Theoreme nicht einfach willkürlich festsetzen können, insofern wir durch die Festsetzungen der Axiome und Schlussregeln *gezwungen* sind, bestimmte Zeichenfiguren als Beweise der Theoreme zu akzeptieren. Bei der Annahme dieser Position, die Dummett als *moderaten Konventionalismus* bezeichnet, könnten jedoch die Theoreme nicht mehr als ‚wahr per Konvention' bezeichnet werden, weil sie – anders als die Axiome – eben nicht selbst festgesetzt sind, sondern nur aus Festsetzungen folgen (vgl. Dummett 1959, S. 329). Oder aber, es wird geleugnet, dass wir durch die Festsetzungen von Axiomen und Schlussregel in irgendeiner Weise dazu gezwungen sind, bestimmte Zeichenfiguren als Beweise eines Theorems zu akzeptieren, sondern immer die Freiheit haben, zu entscheiden, ob wir eine gegebene Beweisfigur als Beweis eines bestimmten Aussage akzeptieren oder nicht. Gemäß dieser Auffassung, die Dummett als *Vollblutkonventionalismus* bezeichnet, kann zwar die notwendige Natur mathematischer Aussagen in einheitlicher Weise erklärt werden, insofern hiernach nicht nur die Wahrheit von Axiomen, sondern auch die Wahrheit von Theoremen festgesetzt wird. Diese Auffassung erscheint jedoch absurd, da uns nach Dummett ein Beweis zu einem bestimmten Theorem führt, ob wir es nun wollen oder nicht (Dummett 1959, S 329). Da somit keine der beiden konventionalistischen Alternativen die Notwendigkeit mathematischer Theoreme verständlich zu machen scheint, erscheint dadurch der Konventionalismus als solcher widerlegt.

Während er den logischen Positivisten die Position des moderaten Konventionalismus zuschreibt, behauptet Dummett, dass Wittgensteins Position die des Vollblutkonventionalismus wäre. Diese Behauptung ist insofern abwegig, als Wittgenstein sowohl in der mittleren als auch in der Spätphase seiner Philosophie ausdrücklich betont, dass mathematische Aussagen entweder festgesetzt oder nach bestimmten Regeln erzeugt werden (vgl. z.B. PB, §201 oder BGM, IV §8).

Aber wie dem auch sei: das von Dummett formulierte Dilemma muss natürlich so oder so aufgelöst werden!

Hierfür ist zunächst zwischen dem *Definieren* eines Kalküls und dessen *Betreiben* zu unterscheiden. Das Definieren ist Sprechakt, der in der Tat auch als Stipulieren oder Festsetzen bezeichnet werden kann. Und das, was bei der Definition eines Kalküls festgesetzt wird, sind Regeln für das sukzessive Niederschreiben (oder Aussprechen) bestimmter Ausdrücke. Im Fall eines axiomatischen Kalküls, an dem Dummett sich orientiert, werden hierbei zum einen bestimmte Ausdrücke – die sogenannten Axiome des Kalküls – angegeben, welche stets ohne Weiteres Niedergeschrieben werden können. Zum anderen werden bestimmte syntaktische Regeln – die Schlussregeln des Kalküls – angegeben, welche bestimmen, durch welche Ausdrücke man eine Folge niedergeschriebener Ausdrücke fortsetzen kann.

Das Definieren eines Kalküls unterliegt insofern keinen Regeln, als es keine Bedingungen für die Korrektheit der Wahl bestimmter Regeln (im Gegensatz zu anderen Regeln) gibt. Da es keine Korrektheitsstandards dieser Art gibt, ist es sinnlos, in Bezug auf eine Definition von Wahrheit – und insbesondere von Wahrheit per Konvention – zu sprechen. Das Definieren ist ein anderer Sprechakt als das Behaupten. Dass jemand eine von ihm geäußerte Definition versteht, manifestiert sich daher auch nicht darin, die Definition zurückzunehmen, nachdem er festgestellt hat, dass bestimmte Bedingungen nicht erfüllt sind. Vielmehr muss der Definierende seine Definition nur dann zurücknehmen, wenn er nicht mehr gewillt ist, sich an die durch sie festgesetzten Regeln zu halten. Sein Verstehen manifestiert sich also darin, sich selbst an die fraglichen Regeln zu halten und das Verhalten Anderer in entsprechender Weise zu sanktionieren.

Das Betreiben eines Kalküls besteht dagegen darin, den in den Definitionsakten festgesetzten Kalkülregeln folgend Ausdrücke niederzuschreiben. Da hierbei die Regeln des Kalküls die Bedingungen dafür bestimmen, ob das Niederschreiben eines bestimmten Ausdrucks korrekt ist, handelt es sich bei diesem Niederschreiben nicht um ein Definieren (oder Festsetzen), sondern um ein Behaupten. Und die niedergeschriebenen Ausdrücke können als Aussagen aufgefasst werden, welche behaupten, dass sie, wenn man den Kalkülregeln folgt, niedergeschrieben werden können. Beim Betreiben eines Kalküls schlägt sich die Unterscheidung zwischen den Axiomen und den Theoremen derart nieder, dass die Behauptung – d.h.: das Niederschreiben – einer Aussage dann und nur dann unabhängig von zuvor gemachten Behauptungen korrekt ist, wenn sie in der Definition des Kalküls als Axiom festgesetzt wurde.

Nun zu der Unterscheidung notwendiger und kontingenter Wahrheiten! Dummett hat zwar zunächst darin recht, dass zumindest gemäß Carnap der Ausdruck ‚notwendig wahr' als ‚allein per Konvention wahr' gedeutet werden kann. Aber wie schon in Abschnitt 3.4 ausgeführt wurde, steht ‚*allein* per Konvention' hierbei im Gegensatz zu ‚per Konvention *und* Wirklichkeitsbeschaffenheit' und nicht etwa, wie Dummett nahezulegen scheint, im Gegensatz zu ‚per Zwang'. Hiernach sind die Wahrheitswerte aller Aussagen, also sowohl der Notwendigen als auch der Kontingenten, durch bestimmte Konventionen – nämlich Wahrheitsbedingungen bzw. Verifikationsregeln – bestimmt. Notwendige Aussagen unterscheiden sich jedoch darin von kontingenten Aussagen, dass ihre Wahrheitswerte nicht zusätzlich von der Wirklichkeitsbeschaffenheit abhängen. Gleichbedeutend hiermit ist, dass für die Verifikation notwendiger Aussagen keine Wirklichkeitsuntersuchungen konstitutiv sind.

Dieser Unterschied kann nun durch Bezug arithmetische und experimentelle Aussagen noch einmal erläutert werden. Hierbei ist zunächst ist zu bemerken, dass im Prinzip auch das Erzeugen der Längenaussage ‚a ist 1 Meter lang' als ein Konstruktionsvorgang aufgefasst werden kann. Aber im Gegensatz zu den Regeln für Erzeugung einer arithmetischen Gleichung durch die Konstruktion ihres Beweises, beziehen sich die Regeln für die Erzeugung von ‚a ist 1 Meter lang' nicht allein auf die Form bestimmter Ausdrücke, sondern auf die Beschaffenheit des durch ‚a' bezeichneten Gegenstands. Darstellende Regeln dieser Art, welche die Erzeugung experimenteller Aussagen an bestimmte Wirklichkeitsuntersuchungen – wie etwa Längenvergleiche konkreter Gegenstände – knüpfen, gibt es im Fall der Aussagen eines axiomatischen Kalküls nicht. Und aus diesem Grund kann man also sagen, dass die Theoreme eines axiomatischen Kalküls allein per Konvention wahr sind, insofern bereits die ihre Bedeutung definierenden Konventionen bestimmen, dass die Theoreme wahr sind.

Dummetts Gegensatz zwischen von *Freiheit* und *Zwang* – wenn man sich so ausdrücken will – kann offenbar nicht auf Aussagen verschiedener Art bezogen werden. Denn jede Verifikation einer Aussage – ganz gleich, ob diese notwendiger oder kontingenter Art ist – besteht in einem Befolgen bestimmter Regeln, an dessen Ende man gezwungen ist, ein bestimmtes Ergebnis zu akzeptieren. Durch die Unterscheidung zwischen Freiheit und Zwang lassen sich bestenfalls die beiden *Sprechakte* des Definierens und Behauptens charakterisieren. Denn wie zuvor erläutert, ist das Definieren eines Kalküls insofern ein willkürliches Festlegen bestimmter Regeln, als man zur Rücknahme einer solchen Festlegung nicht durch die Feststellungen des Erfülltseins irgendwelcher Bedingungen gezwungen ist, sondern nur durch die Entscheidung, sich nicht – oder: nicht mehr – an die festgelegten Regeln zu halten. Aus diesem Grund hat also Dummmetts moderater Konventionalist insofern Recht, dass nur die Axiome, nicht jedoch die Theoreme festgesetzt sind, als eine Aussage eben dann und nur dann ein Axiom eines bestimmten Kalküls ist, wenn sie in der Definition eines Kalküls als solches festgesetzt wird. Dennoch sind sowohl die Axiome als auch die Theoreme eines Kalküls insofern per

Konvention wahr, als ihre Wahrheit nur von den Regeln des Kalküls und nicht von der Beschaffenheit der Wirklichkeit abhängt.

Nun zum Vollblutkonventionalismus! Dummetts Rede von der Entscheidung, einen Beweis zu akzeptieren bzw. abzulehnen, kann zumindest im Prinzip in zweierlei Weise gedeutet werden. Auf arithmetische Rechnungen bezogen, könnte hiermit zum einen gemeint sein, dass man jeweils in Bezug auf jede einzelne Rechnung – also etwa die Berechnung von 13×13 – willkürlich entscheidet, *welche* Ziffer man als das Ergebnis der Rechnung betrachtet. Und es scheint diese Deutung zu sein, die Dummett Wittgenstein unterstellt, und die er zu Recht als absurd verwirft (vgl. Dummett 1959, S. 330). Denn eben weil man beim Rechen bestimmten Regeln folgt, *wählt* man das Ergebnis nicht.

Zum Anderen könnte die These des Vollblutkonventionalisten dahingehend gedeutet werden, dass man sich in Bezug auf das Ergebnis, welches man durch das einmalige Befolgen der Rechenregeln erhält, entscheidet, ob man es in der Folge als Kriterium dafür zu benutzen will, die Korrektheit anderer Rechenvorgänge zu bewerten. Das, was hierbei entschieden würde, wäre also, ob man die Eindeutigkeitsregel auf die fragliche Rechnung anwenden und diese somit als eine Rechnung im eigentlichen Sinn und nicht als ein Experiment behandeln will. Es würde somit also nicht das *Ergebnis* selbst, sondern nur dessen *Status* gewählt (vgl. hierzu auch Hacker 1997, S. 504). Bei dieser zweiten Deutung wäre die These des Vollblutkonventionalisten zwar nicht absurd. Jedoch legt es der Blick auf die tatsächliche Praxis nahe, in Bezug auf die Annahme der Eindeutigkeitsregel und die damit verbundene normative Verwendung von Rechenresultaten eher von einer *Einstellung* anstatt von *Entscheidungen* zu sprechen. Denn normalerweise steht es für den Rechenden zu *jedem* Zeitpunkt fest, einmal ermittelte Rechenergebnisse als Kriterium für Rechenfehler zu verwenden. Einen Moment des Entschlusses zwischen der rechnerischen und experimentellen Behandlung von Rechenergebnissen gibt es nicht. Die Alternative der experimentellen Behandlung wird nicht nur nicht in Betracht gezogen; ihre Möglichkeit muss dem Rechnenden nicht einmal aufgefallen sein.

Im Hinblick auf Dummetts Konventionalismuskritik kann somit das Fazit gezogen werden, dass das von ihm geschilderte Dilemma den Konventionalismus zumindest so lange nicht trifft, wie dieser nicht im Sinn eines *Stipulationismus* interpretiert wird. Das, was festgesetzt (oder: stipuliert) wird, sind die Regeln des Kalküls, also seine Startregeln (Axiome), seine Schlussregel und eventuell die Eindeutigkeitsregel. Dabei hat Dummetts moderater Konventionalist darin Recht, dass nur die Axiome, nicht jedoch die Theoreme festgesetzt werden. Und auch der Vollblutkonventionalist liegt dann nicht ganz daneben, wenn er mit der Rede vom Festsetzen der Theoreme eigentlich die Festsetzung der auf die Theoreme bezogenen Eindeutigkeitsregel meint. Die Rede von *Wahrheit per Konvention* bezieht sich jedoch nicht auf das

Definieren, sondern auf das Betreiben des Kalküls, also auf das Niederschreiben von Aussagen des Kalküls – Axiomen und Theoremen – gemäß der festgesetzten Regeln. Und sie steht hier im Gegensatz zur Rede von der *Wahrheit per Konvention und Wirklichkeitsbeschaffenheit*. Und es erscheint weiterhin berechtigt, sowohl die Axiome als auch die Theoreme eines Kalküls als ‚wahr allein per Konvention' zu klassifizieren, da deren Wahrheit nicht durch Untersuchungen der Wirklichkeit festgestellt wird, sondern durch das Konstruieren von Ausdrücken nach bestimmten syntaktischen Regeln.

Auf der Grundlage dieser Klärungen kann nun zuletzt noch einmal auf die von Dummett aufgeworfenen Fragen nach dem Status und der Erkenntnis notwendiger Wahrheiten zurückgekommen werden. Wie zuvor erläutert, ist die Notwendigkeit arithmetischer Aussage *normativ* zu verstehen. Dass sich das Resultat einer arithmetischen Rechnung nicht zufällig, sondern mit Notwendigkeit ergibt, bedeutet, dass die Identität des Resultats als Kriterium des korrekten Rechnens benutzt wird. Werden bei der Verifikation ein und derselben arithmetischen Aussage bei zwei verschieden Gelegenheiten verschiedene Wahrheitswerte ermittelt, wird darauf geschlossen, dass zumindest einer der beiden Verifikationsvorgänge fehlerhaft war. Und wurde der Wahrheitswert einer arithmetischen Aussage einmal fehlerfrei ermittelt, so gilt das Ermitteln desselben Wahrheitswerts in der Folge als Kriterium für die korrekte Durchführung der Verifikation der Aussage. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, dass die Notwendigkeit der arithmetischen Aussagen sich insofern nicht unmittelbar daraus ergibt, dass diese im zuvor erläuterten Sinn allein per Konvention wahr sind, als es zumindest prinzipiell möglich ist, Zeichenfiguren gemäß den arithmetischen Regeln zu konstruieren, ohne die Eindeutigkeitsregel anzunehmen. Aber wie bereits erläutert, ist die Annahme dieser Regel wesentlich dafür, dass das Konstruieren als ‚rechnen' und die hierdurch erzeugten Aussagen als ‚arithmetisch' bezeichnet werden können.

Diese Klärung des Status der notwendigen Wahrheiten der Arithmetik klärt ebenfalls Dummetts epistemologische Frage danach, wie wir diese Wahrheiten erkennen. Hierbei ist zunächst zu bemerken, dass sich, unabhängig davon, ob sich die Eindeutigkeitsregel angenommen wird oder nicht, der Verifikationsvorgang einer arithmetischen Aussage jeweils in derselben Weise darstellt. In beiden Fällen wird, bestimmten syntaktischen Regeln folgend, eine bestimmte Zeichenfigur konstruiert. Und man könnte sagen, dass das, was in beiden Fällen festgestellt wird, nur das ist, dass sich ein bestimmtes Resultat hier und jetzt ergibt. Der notwendige Status einer arithmetischen Aussage ist demnach kein (zusätzliches) Ergebnis ihrer Verifikation. Welchen Status der Sprecher der verifizierten Aussage zubilligt, ist vielmehr erst daraus ersichtlich, wie er das Resultat der Verifikation im Anschluss daran verwendet. Er behandelt die Aussage als notwendig, wenn er bereit ist, das Ergebnis ihrer Verifikation als

Kriterium des korrekten Verifizierens zu benutzten (vgl. BGM, I §28; BGM, VI §36). Dass sich das Resultat einer Rechnung nicht nur kontingenter Weise hier und jetzt ergibt, sondern sich immer und überall ergeben *muss*, ist also nicht etwas, was im Rechenvorgang festgestellt wird. Die Notwendigkeit wird nicht erfahren, sondern angenommen. Das arithmetische ‚muss' ist der Ausdruck einer Einstellung zu den Aussagen der Arithmetik.

9. Arithmetische Aussagen als Darstellungsnormen

Nachdem sich die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels auf die reine Mathematik beschränkten, soll im letzten Kapitel dieser Arbeit nun auch die Adäquatheit von Wittgensteins Philosophie der angewandten Mathematik gezeigt werden. Hierfür sollen in den ersten drei Abschnitten zunächst drei Arten der Anwendung mathematischer Aussagen unterschieden und diskutiert werden. Zum einen die *innermathematische* Anwendung mathematischer Aussagen, welche, wie in Abschnitt 9.3 zu zeigen sein wird, im Abkürzen mathematischer Beweise besteht. In Abschnitt 9.1 wird ferner die von Wittgenstein als *geometrische* Anwendung bezeichnet Verwendung mathematischer Aussagen als Regeln für die empirische Beschreibung der Rechenpraxis dargestellt werden. In Abschnitt 9.2 soll gezeigt werden, dass Wittgensteins Normativitätsthese korrekt ist, der zu Folge die *außermathematische* Anwendung arithmetischer Aussagen in der Kodifikation von Implikationsregel zwischen Zahlaussagen besteht. Diese These wird dann in den Abschnitten 9.4 und 9.5 weiter erläutert. So soll Wittgensteins Position – in Abschnitt 9.4 – insbesondere mit empiristischen, logizistischen und formalistischen Auffassungen der Anwendung mathematischer Aussagen verglichen werden.

9.1 In BGM IV §8 behauptet Wittgenstein, dass *eine* Anwendung des mathematischen Satzes immer das Rechnen selbst sein müsse. Die in diesem Kapitel zu untersuchende Anwendung arithmetischer Aussagen sei daher mit einer Darstellung *dieser* Anwendung begonnen.

Die Rechenphänomene, welche Wittgenstein im Sinn hat, werden durch zwei verschiedene Arten *empirischer* Aussagen beschrieben. Einerseits Aussagen darüber, dass da und dort ein Beweis steht. Und andererseits Aussagen darüber, dass da und dort jemand einen Beweis führt. Dementsprechend muss auch zwischen *statischen* und *dynamischen* Beweisprädikaten unterschieden werden; also zwischen Beweisprädikaten, welche Zeichenfiguren klassifizieren, und Beweisprädikaten, welche die Handlungen des Konstruierens solcher Zeichenfiguren klassifizieren. Hierbei hat ein statisches Beweisprädikat insofern begriffliche Priorität gegenüber dem entsprechenden dynamischen Beweisprädikat, als die Bedingung dafür, dass das dynamische Beweisprädikat auf einen Konstruktionsvorgang zutrifft, darin besteht, dass das statische Beweisprädikat auf die hierbei konstruierte Zeichenfigur zutrifft. So prüft etwa ein Lehrer, um herauszufinden, ob seine Schüler korrekt rechnen, lediglich die von den Schülern niedergeschriebenen Rechnungen. Etwaige – oder besser vielleicht: vermeintliche – innere Begleitvorgänge der Zeichenkonstruktionen sind für das Zutreffen des dynamischen Beweisprädikats irrelevant (vgl. BGM, VI §16). Man könnte also definieren:

‚beweisen' bedeutet: einen Beweis konstruieren.

Statische Beweisprädikate sind ihrerseits durch die syntaktischen Regeln des entsprechenden Kalküls definiert. So sind, wie in Kapitel 7.1 erläutert wurde, arithmetische und algebraische Beweise Gleichungsketten, in denen je zwei benachbarte Terme bestimmten Umformungsregeln genügen. Und das bedeutet: ob das Prädikat ‚arithmetischer Beweis' auf eine irgendwo niedergeschriebene Gleichungskette zutrifft, wird in der Weise festgestellt, dass die fraglichen Gleichungskette daraufhin untersucht wird, ob die benachbarten Terme in bestimmten syntaktischen Beziehung zueinander stehen. In einem axiomatischen Kalkül *K* ist ein Beweis dagegen eine Aussagenfolge, in der jede Aussage, die kein Axiom des Kalküls ist, aus ihr in der Folge vorangehenden Aussagen nach den Schlussregeln des Kalküls ableitbar ist. Ob ‚K-Beweis' auf eine gegebene Aussagenfolge zutrifft, wird also in der Weise festgestellt, dass überprüft wird, ob die fraglichen Aussagen in bestimmten syntaktischen Beziehungen untereinander bzw. zu den Axiomen des Kalküls stehen.

Die Umformungsregeln, welche das Betreiben eines Kalküls und damit die Anwendbarkeit der entsprechenden Beweisprädikate definieren, werden typischerweise durch die Angabe bestimmter Formeln kodifiziert. So werden, wie in Kapitel 7.1 erläutert, die für den arithmetischen Kalkül und damit für das Prädikat ‚arithmetischer Beweis' konstitutiven Umformungsregeln durch die Angabe algebraischer Gleichungen wie etwa der Folgenden kodifiziert:

$$(a+b)+1 = a+(b+1)$$

Umformungsvorbilder dieser Art können demnach als formale *Paradigmen* für die Anwendung der entsprechenden Beweisprädikate verwendet werden, indem, ob ‚arithmetischer Beweis' auf eine gegebene Gleichungskette zutrifft, in der Weise festgestellt wird, dass benachbarte Terme der Gleichungskette mit den fraglichen algebraischen Formeln verglichen werden. So wie das Zutreffen von Farbprädikaten auf bestimmte Gegenstände durch deren Vergleich mit entsprechenden Farbtäfelchen festgestellt werden kann, kann also das Zutreffen von Beweisprädikaten auf Zeichenfiguren durch deren Vergleich mit entsprechenden Formeln festgestellt werden.

In den ersten beiden Abschnitten von Kapitel 6 wurde die Äquivalenzrelation der *Typgleichheit* von Zeichen und Zeichenfolgen analysiert. Die grundlegenden Typgleichheitsaussagen, welche wie etwa ‚Hier steht dasselbe Zeichen wie dort' oder ‚Auf dem

Zettel des Schülers steht dieselbe Zeichenfigur wie auf dem des Lehrers‘ die Typgleichheit zweier demonstrativ oder raumzeitlich gekennzeichneter Zeichenvorkommnisse behaupten, seien im Folgenden der Einfachheit halber jeweils in der einheitliche Form ‚a ist typgleich mit b‘ notiert. Hierbei stehen also ‚a‘ und ‚b‘ für Demonstrativa oder raumzeitlichen Kennzeichnungen von Zeichenvorkommnissen. Die soeben genannten Beispielaussagen wären hiernach in ‚Das Zeichen, das hier steht, ist typgleich mit dem Zeichen, das dort steht‘ und ‚Die Zeichenfigur, die auf dem Zettel des Schülers steht, ist typgleich mit der Zeichenfigur, die auf dem Zettel des Lehrers steht‘ umzuformulieren.

Die Verwendung aller Beweisprädikate ist durch den Umstand bestimmt, dass Beweisprädikate *typkongruent* sind. Das bedeutet: ist ‚K-Beweis‘ das Beweisprädikat eines bestimmten Kalküls (wie etwa die Prädikate ‚arithmetischer Beweis‘ und ‚algebraischer Beweis‘), und sind ‚a‘ und ‚b‘ singuläre Terme, die sich auf Vorkommnisse von Zeichenfiguren beziehen, dann gilt:

‚a ist ein K-Beweis ∧ a ist typgleich zu b‘ impliziert ‚b ist ein K-Beweis‘.

Angenommen etwa, zwei mit einer arithmetischen Berechnung beauftragte Schüler haben jeweils typgleiche Zeichenfiguren niedergeschrieben. Dann steht damit auch schon vor der entsprechenden Prüfung dieser Zeichenfiguren fest, dass das Prädikat ‚arithmetischer Beweis‘ entweder auf beide Zeichenfiguren zutrifft, oder aber auf keines von Beiden.

Dass Beweisprädikate typkongruent sind, bedeutet, dass sie kongruent zur Relation der Typgleichheit sind. In analoger Weise sind Farbprädikate kongruent zur Relation der Farbgleichheit und Längenprädikate zur Relation der Längengleichheit, insofern auf farbgleiche Gegenstände dieselben Farbprädikate und auf längengleiche Gegenstände dieselben Längenprädikate zutreffen. Und ebenso wie etwa die Farbkongruenz von Farbprädikaten ist auch die Typkongruenz von Beweisprädikaten keine empirische Hypothese, sondern eine logische Regel. Sollte man tatsächlich einmal bei den entsprechenden drei Verifikationen zu dem Ergebnis gelangen, dass zwar ‚a ist ein K-Beweis‘ und ‚a ist typgleich zu b‘ wahr sind, ‚b ist ein K-Beweis‘ jedoch falsch ist, dann wird darauf geschlossen, dass zumindest eine der drei Verifikationen fehlerhaft war. Und man würde die Verifikationen wiederholen, um herauszufinden welche.

Ist ein Prädikat kongruent zu einer bestimmten Äquivalenzrelation, dann besteht immer die Möglichkeit, einen Gegenstand, auf den das Prädikat zutrifft, entsprechend der fraglichen Äquivalenzrelation als Paradigma für das Zutreffen des Prädikats zu verwenden. Das bedeutet: in der Äquivalenzrelation zu dem fraglichen Paradigma zu stehen, ist eine *hinreichende* Bedingung für das Zutreffen des Prädikats und kann daher als neues Kriterium hierfür benutzt werden. Auch für das Zutreffen eines Beweisprädikats auf eine gegebene Zeichenfigur ist es somit hinreichend, dass das fragliche Beweisprädikat auf eine andere Zeichenfigur zutrifft, welche zu der Gegebenen typgleich ist. Anstatt die gegebene Zeichenfigur mit den Formeln zu vergleichen, welche das Beweisprädikat definieren, kann also *alternativ* auch dadurch festgestellt werden, dass das Beweisprädikat auf die gegebene Zeichenfigur zutrifft, dass deren Typgleichheit mit einer anderen Zeichenfigur festgestellt wird, welche bereits als Beweis der fraglichen Art erkannt wurde. So kann also der Lehrer auch aus der Typgleichheit der von einem Schüler konstruierten Zeichenfigur zu der von ihm selbst konstruierten Musterlösung darauf schließen, dass der Schüler einen Beweis konstruiert hat. Neben den Formeln, die das Beweisprädikat definieren, können also (zumindest im Prinzip) auch diejenigen Zeichenfiguren als Paradigmen des Beweisprädikats verwendet werden, die bereits als Beweise der fraglichen Art erkannt wurden.

Wie Wittgenstein in (PG, S. 376) bemerkt, ist aus einem Beweis nach einer bestimmten Regel abzulesen, *welche* Aussage er beweist. Im Fall eines arithmetischen oder algebraischen Beweises ist die durch eine entsprechende Gleichungskette bewiesene Aussage diejenige Gleichung, welche aus den beiden durch die Gleichungskette miteinander verbundenen Termen gebildet wird. Im Fall eines axiomatischen Kalküls, dessen Beweise also aus Aussagenfolgen bestehen, ist es jeweils die letzte Aussage einer solchen Folge, die durch sie bewiesen wird (vgl. BGM, I §28). Die entsprechenden *aussagerelativen* Beweisprädikate können somit jeweils als *Konjunktionen* definiert werden aus dem jeweiligen allgemeinen Beweisprädikat einerseits sowie einem weiteren syntaktischen Prädikat andererseits, dass durch die Aussage und die fragliche Ableseregel definiert ist. In diesem Sinn können also etwa die Prädikate für die Beweise bestimmter arithmetischer Gleichungen wie folgt definiert werden:

‚arithmetischer Beweis von $T_1=T_2$' bedeutet: arithmetischer Beweis $\wedge$ verbindet T_1 mit T_2

Und analog hierzu können die aussagerelativen Beweisprädikate eines axiomatischen Kalküls K durch die Bestimmung definiert werden, dass ‚K-Beweis von p' gleichbedeutend mit ‚K-Beweis $\wedge$ endet mit p' sei. In beiden Fällen gilt also, dass das aussagerelative Beweisprädikat genau dann auf eine Zeichenfigur zutrifft, wenn auf diese sowohl das kategorische Beweisprädikat – ‚arithmetischer Beweis' bzw. ‚K-Beweis' –, als auch das aussagerelative Ableseprädikat – also ‚endet mit p' bzw. ‚verbindet T_1 mit T_2' – zutrifft.

Wie bereits mehrfach erläutert, behauptet eine mathematische Aussage die Konstruierbarkeit ihres Beweises. Denn die Feststellung, dass sie wahr ist, besteht darin, einen Beweis der Aussage zu konstruieren. Hierbei wird also eine Zeichenfigur konstruiert, auf die das entsprechende aussagerelative Beweisprädikat zutrifft. So besteht etwa die Feststellung der

Wahrheit einer arithmetischen Gleichung ‚$T_1=T_2$' in der Konstruktion einer Gleichungskette, auf welche ‚arithmetischer ‚Beweis', ‚verbindet T_1 mit T_2' und folglich auch ‚arithmetischer Beweis von $T_1=T_2$' zutrifft. Und ist ‚p' eine Aussage eines axiomatischen Kalküls K, so besteht die Feststellung der Wahrheit von ‚p' in der Konstruktion einer Aussagenfolge, auf welche ‚K-Beweis', ‚mit p endend' und folglich auch ‚K-Beweis von p' zutrifft. Die Beweiskonstruktion, durch welche die Wahrheit einer bestimmten mathematischen Aussage festgestellt wird, demonstriert somit stets zwei äquivalente begriffliche Regeln. Sie zeigt, dass das allgemeine Beweisprädikat des entsprechenden Kalküls *kompatibel* mit dem aussagerelativen Ableseprädikat ist. Und sie zeigt damit auch, dass diejenigen Aussagen *synthetisch* sind, welche behaupten, dass irgendwo eine Zeichenfigur steht, auf welche das entsprechende aussagerelative Beweisprädikat zutrifft. So gilt also im Fall des axiomatischen Kalküls, dass die Aussagenfolge, welche ‚p' als wahr erweist, zeigt, dass die Prädikate ‚K-Beweis' und ‚mit p endend' kompatibel sind, und dass daher Aussagen der Form ‚a ist ein K-Beweis von p' synthetisch sind. Und analog hierzu zeigt die ‚$T_1=T_2$' als wahr erweisende Gleichungskette die Kompatibilität von ‚arithmetischer Beweis' und ‚verbindet T_1 mit T_2' sowie den synthetischen Charakter von Aussagen der Form ‚a ist ein arithmetischer Beweis von ‚$T_1=T_2$'. Aus diesem Grund kann man also insbesondere sagen (BGM, III §61):

> Eine arithmetische Gleichung ‚$T_1=T_2$' ist genau dann *wahr*, wenn gilt:
> ‚a ist ein arithmetischer Beweis von $T_1=T_2$' ist *synthetisch*. Oder, äquivalent dazu:
> ‚arithmetischer Beweis' und ‚verbindet T_1 mit T_2' sind *kompatibel*.

Es sei an dieser Stelle an den kanonischen Entscheidungsalgorithmus arithmetischer Gleichungen aus Abschnitt 6.4 erinnert. Hiernach werden beide Terme einer arithmetischen Gleichung ‚$T_1=T_2$' durch sukzessives Eliminieren der Operationszeichen in eine bestimmte Ziffer überführt. Führen diese beiden Reduktionen jeweils zu derselben Ziffer, so ist die Wahrheit von ‚$T_1=T_2$' damit erwiesen. Denn in diesem Fall können ‚T_1' und ‚T_2' durch die beiden Gleichungsketten, welche sie auf dieselbe Ziffer reduzieren miteinander in einem arithmetischen Beweis verbunden werden. Führen die beiden Reduktionen von ‚T_1' und ‚T_2' dagegen zu verschiedenen Ziffern, so zeigt dies die Unmöglichkeit der Konstruktion einer ‚T_1' mit ‚T_2' verbindenden Gleichungskette, welche den arithmetischen Umformungsregeln genügt. Das bedeutet, dass diese Reduktionen, welche die Gleichung ‚$T_1=T_2$' als falsch erweisen, zeigen, dass die Prädikate ‚arithmetischer Beweis' und ‚verbindet T_1 mit T_2' inkompatibel und daher Aussagen der Form ‚a ist ein arithmetischer Beweis von $T_1=T_2$' kontradiktorisch sind. Man also sagen:

‚$T_1=T_2$‘ ist genau dann *falsch*, wenn gilt:

‚a ist ein arithmetischer Beweis von $T_1=T_2$‘ ist *kontradiktorisch*. Oder, äquivalent dazu: ‚arithmetischer Beweis‘ und ‚verbindet T_1 mit T_2‘ sind *inkompatibel*.

Analog zur Begründung von Kompatibilitäten und Inkompatibilitäten zwischen Farbprädikaten durch Bezug auf Vergleiche entsprechender Farbtäfelchen stellt die Verifikation einer arithmetischen Gleichung eine Art *Kompatibilitätstest* dar, der darüber entscheidet, ob die durch das entsprechende aussagerelative Beweisprädikat gebildeten Aussagen synthetisch oder kontradiktorisch sind. In Wittgensteins Terminologie ausgedrückt, kann man also sagen, dass eine mathematische Aussage behauptet, dass die Rede von ihrem Beweis sinnvoll ist (vgl. BGM, I §28). Mathematische Aussagen sind in jedem Fall schon in dem Sinn *grammatische Sätze*, dass sie Normen für die Darstellung von Zeichenfiguren und Konstruktionsvorgängen sind. Insbesondere bestimmen arithmetische Gleichungen, ob es (in Wittgensteins Sinn) sinnvoll ist, davon zu reden, dass irgendwo eine Gleichungskette geschrieben steht, welche den arithmetischen Umformungsregeln genügt und die beiden Terme, durch welche die Gleichung gebildet ist, miteinander verbindet. Angenommen, die Falschheit einer arithmetischen Gleichung ‚$T_1=T_2$‘ sei erwiesen. Dann können Aussagen wie ‚Im Nachbarraum steht ein Beweis von $T_1=T_2$ an der Tafel‘ oder ‚N.N. hat $T_1=T_2$ bewiesen‘ ohne weitere Prüfungen – also ohne die fraglichen Zeichenfiguren in Augenschein zu nehmen – zurückgewiesen werden. Denn aus dem die Falschheit der Gleichung erweisenden Beweis ist ersichtlich, dass ‚Beweis von $T_1=T_2$‘ auf keine Zeichenfigur zutreffen kann.

Die Anwendung einer mathematischen Aussage als Regel für die Beschreibung entsprechender Beweisfiguren und Beweisvorgänge bezeichnet Wittgenstein auch als ihre *geometrische Anwendung* (vgl. BGM, III §38). Ob Wittgenstein diese geometrische Anwendung als wesentlich für die Rede von Mathematik und mathematischen Aussagen hält, ist allerdings nicht ganz klar. Während er in (BGM, III §38) mit der Idee spielt, dass die geometrische Anwendung unwesentlich sei, betont er in der schon zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten Passage in (BGM IV §8), dass eine Anwendung der mathematischen Aussage immer das Rechnen selbst sein müsse. Klar scheint jedenfalls zu sein, dass *wir* mathematische Aussagen tatsächlich in dieser Weise anwenden. Und diese Anwendung wird von allen mathematischen Aussagen gemacht, die überhaupt einem bestimmten Kalkül angehören. So können also etwa auch Aussagen der Mengenlehre, von denen oft gesagt wird, sie hätten keine Anwendung, zumindest in diesem minimalen Sinn angewendet werden, also als Regeln für die Beschreibung entsprechender Beweisfiguren und Beweisvorgänge. Wenn nun eine andere Gemeinschaft eine Praxis des Konstruierens von Zeichenfiguren hätte, welche sich von unserer Mathematik nur darin unterscheidet, dass hierin die Konstruktionsergebnisse nicht geometrisch – also nicht als Regeln für die Beschreibungen entsprechender Zeichenkonstruktionen – angewendet werden, dann wäre dies zumindest ein guter Grund dafür, diese Praxis nicht mehr als ein Beweisen bzw. als ein Betreiben von Mathematik zu bezeichnen. Denn die Konstruktionsergebnisse geometrisch anzuwenden, bedeutet ja nichts anderes, als die Konstruktionsvorgänge nicht als Experimente, sondern als Beweise zu behandeln.

9.2 In diesem Abschnitt soll nun die Anwendung arithmetischer Gleichungen auf (empirische) *Zahlaussagen* untersucht werden. Diese Anwendung kann mit Wittgenstein insofern als der „Zivilgebrauch" der arithmetischen Zeichen bezeichnet werde, als sie im Gegensatz zur geometrische Anwendung arithmetischer Gleichungen nicht mehr nur auf die arithmetische Rechenpraxis bezogen ist (vgl. BGM, V §2). Bekanntermaßen hat Wittgenstein diese *außermathematische* Anwendung durch die These charakterisiert, dass arithmetische Gleichungen Ersetzungsregeln sind (WWK, S. 157; vgl. hierzu auch Waismann 1970, S. 111). Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass diese These zwar korrekt ist, jedoch noch keine vollständige Charakterisierung der Anwendung arithmetischer Gleichungen auf Zahlaussagen liefert.

Hierfür sei zunächst der in Abschnitt 4.2 eingeführte Begriff des Anzahloperators in der Weise verallgemeinert, dass hierunter nicht mehr nur die durch eine Ziffer ‚n' gebildeten Ausdrücke ‚Es gibt n', sondern auch die durch einen beliebigen arithmetischen Term ‚T' gebildeten Ausdrücke ‚Es gibt T' fallen.[1] Ist ‚T' nicht bloß eine Ziffer, sondern ein komplexer Term – wie etwa ‚68+57' –, so sei der entsprechende Anzahloperator ‚Es gibt T' im Folgenden auch als *arithmetischer Anzahloperator* bezeichnet. Durch die Folgende Bestimmung kann nun die Verwendung der arithmetischen Anzahloperatoren im Sinn der von Wittgenstein angedeuteten Ersetzungsregel erklärt werden:

(E) Für beliebige arithmetische Terme ‚T_1' und ‚T_2' gilt:

‚Es gibt T_1 F' ist äquivalent zu ‚Es gibt T_2 F' $\Leftrightarrow$ ‚$T_1=T_2$' ist wahr.

Unter der Voraussetzung, dass sowohl die Wahrheitsbedingungen der einfachen Anzahlaussagen ‚Es gibt n F' als auch die Wahrheitsbedingungen arithmetische Gleichungen bereits bestimmt sind, lässt sich aus (E) die folgende Wahrheitsbedingungsangabe für arithmetische Anzahlaussagen ableiten:

[1] Der Kürze halber seien die Anzahlaussagen der Form ‚Es gibt genau n F' im Folgenden einfach in der Form ‚Es gibt n F' notiert. Auch ‚Es gibt T F' sei demnach im Sinn von ‚Es gibt genau T F' zu verstehen.

(E*) Sei ‚T' ein arithmetischer Term und ‚n' eine Ziffer, dann gilt:

‚Es gibt T F' ist wahr ⇔ Wenn ‚T=n' wahr ist, dann ist ‚Es gibt n F' wahr.

Unter der im weiteren Verlauf dieses Abschnitts stets unterstellten Annahme, dass die einfachen Anzahlaussagen durch Bezug auf das transitive Zählen erklärt sind, kann die Verifikation einer arithmetischen Anzahlaussage ‚Es gibt genau T F' nach (E*) also in zwei Schritte zerlegt werden:

(1) Zuerst wird eine arithmetische Gleichung der Form ‚T=n' erzeugt, indem ‚T', den arithmetischen Umformungsregeln folgend, auf eine bestimmte Ziffer ‚n' reduziert wird.
(2) Dann wird in einem zweiten Schritt die aus der Ersetzung von ‚T' durch ‚n' resultierende einfache Anzahlaussage ‚Es gibt genau n F' durch das transitive Zählen der F verifiziert.
(3) Stellt sich ‚Es gibt n F' hierbei als wahr heraus, so gilt auch ‚Es gibt T F' als wahr; stellt sich ‚Es gibt n F' dagegen als falsch heraus, so gilt auch ‚Es gibt T F' als falsch.

Kurz gesagt, besteht also nach (E*) die Verifikation von ‚Es gibt T F' darin, festzustellen, ob die Berechnung von T zu derselben Ziffer führt wie das transitiven Zählen der F.

Nun kann man zwar sagen, dass durch (E) (bzw. E*) dem gesamten arithmetischen Vokabular ein Zivilgebrauch gegeben wird, da auf der Grundlage dieser Regel jetzt nicht mehr nur die Ziffern, sondern auch die arithmetischen Operationszeichen in empirischen Anzahlaussagen verwendet werden können. Und auch Wittgensteins These, wonach arithmetische Gleichungen Ersetzungsregel sind, ist insofern korrekt, als nach (E) die Wahrheit einer arithmetischen Gleichung ‚T_1=T_2' bestimmt, dass die entsprechenden arithmetischen Anzahlaussagen ‚Es gibt T_1 F' und ‚Es gibt T_2 F' äquivalent sind. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Verwendung der arithmetischen Anzahloperatoren und damit der entsprechende Zivilgebrauch der arithmetischen Operationszeichen *so weit* noch *zwecklos* ist. Denn durch die Regeln (E) bzw. (E*) allein wird ja zunächst nicht mehr erreicht, als die Verifikation von Anzahlaussagen durch einen zusätzlichen Rechenschritt zu verkomplizieren. Es ist nicht einzusehen, warum man überhaupt eine arithmetische Anzahlaussage ‚Es gibt T F' anstelle der ihr entsprechenden einfachen Anzahlaussage ‚Es gibt n F' verwenden sollte.

Entscheidend für das Verständnis der Anwendung arithmetischer Gleichungen auf Zahlaussagen ist erst die von Wittgenstein in (BGM, VII §3) formulierte Beobachtung, dass einfache und arithmetische Anzahlaussagen *verschiedenen* Verifikationsweisen nahestehen. Wie aus den folgenden exemplarischen Untersuchungen der durch einfache Additionsterme ‚m+n' gebildeten Anzahloperatoren ersichtlich werden wird, erhalten die arithmetischen

Anzahloperatoren erst dadurch einen Zweck, dass sie mit anderen Verifikationsmethoden als dem einfachen transitiven Zählen in Verbindung gebracht werden. Hierfür sei zunächst die Verifikation von einfachen Anzahlaussagen über logischen Summen betrachtet. Wird eine solche Aussage ‚Es gibt k (F∨G)' durch das transitive Zählen der F∨G verifiziert, so kann die fragliche Zählung im Prinzip stets in der folgenden Weise vorgenommen werden:

> (1) Zuerst werden die F transitiv gezählt. Ist ‚n' die Ziffer, zu der diese Zählung führt, so kann an dieser Stelle im Prinzip auch die entsprechende Anzahlaussage ‚Es gibt n F' erzeugt werden.
>
> (2) In einem zweiten Schritt werden dann die noch übrigen G∧¬F in der Weise gezählt, dass *bei n weitergezählt* wird. D.h. also, es wird nicht bei 1, sondern bei n+1 zu zählen begonnen.
>
> (3) Hiernach gilt dann ‚Es gibt k (F∨G)' genau dann als wahr, wenn man beim Weiterzählen nach *n* zu *k* gelangt.

Nun ist zu bemerken, dass die Operation des *Addierens* (zumindest im Prinzip) im *intransitiven Weiterzählen* besteht, insofern die rekursive Definition von ‚+' durch Bezug auf die Nachfolgeroperation ‚S' informell durch das folgenden Prinzip ausgedrückt werden kann:

> (+) ‚n+m=k' ist genau dann wahr, wenn gilt: Durch intransitives Weiterzählen nach *n* gelangt man genau dann zu *k*, wenn man *m*-mal weiterzählt.

Dementsprechend könnte also etwa der Beweis von 68+57=125 informell in der folgenden Weise notiert werden:

68 69 70 … 124 **125**
0 1 2 … 56 **57**
68+57=125

In jedem Fall zeigt also der Beweis einer einfachen Additionsgleichung ‚n+m=k', dass man beim intransitiven Weiterzählen nach *n* dann und nur dann zu *k* gelangt, wenn man *m*-mal intransitiv weiterzählt. Und ein solcher Beweis wird nun nicht nur als Regel für das intransitive, sondern auch als Regel für das transitive Zählen benutzt. Das bedeutet, dass im Anschluss an die Feststellung der Wahrheit von ‚n+m=k' die Regel angenommen wird, dass man auch beim transitiven Weiterzählen nach *n* zu genau dann zu *k* gelangt, wenn man beim einfachen – also bei

1 beginnenden – transitiven Zählen zu *m* gelangt. Alternativ zum transitiven Zählen der F∨G kann eine einfache Anzahlaussage über eine logische Summe ‚Es gibt k (F∨G)' deshalb auch in der folgenden Weise verifiziert werden:

(1) Wie zuvor wird im ersten Schritt durch einfaches transitives Zählen der F eine entsprechende Anzahlaussage ‚Es gibt n F' erzeugt. Doch an die Stelle des transitiven Weiterzählens der G∧¬F treten nun zwei andere Teilschritte.

(2) Zunächst werden die G∧¬F im einfachen Sinn transitiv gezählt, um auf dieser Grundlage eine entsprechende Aussage ‚Es gibt m G∧¬F' zu erzeugen. D.h., anstatt das Zählen der G∧¬F bei n+1 zu beginnen, wird wieder bei 1 begonnen.

(3) Dann wird durch *m*-faches intransitives Weiterzählen nach *n* eine Additionsaussage der Form ‚n+m=k*' erzeugt.

(4) Und hiernach gilt nun ‚Es gibt k (F∨G)' genau dann als wahr, wenn ‚k*=k'.

Diese alternative Verifikationsmethode für Anzahlaussagen über logische Summen kann also durch die folgende Wahrheitsbedingungsangabe kodifiziert werden:

(k, ∨) ‚Es gibt k (F∨G)' ist genau dann wahr, wenn gilt:
Wenn ‚Es gibt n F ∧ Es gibt m (G∧¬F)' wahr ist, dann ist ‚n+m=k' wahr.

Aus (k, ∨) und (E*) ist nun ferner die folgenden Implikationsregel ableitbar, welche die *logische Summe* mit der *arithmetischen Summe* verknüpft:

(+,∨,k) ‚Es gibt n F ∧ Es gibt m (G∧¬F)' impliziert ‚Es gibt n+m (F∨G)'.[2]

Dass ‚Es gibt n+m (F∨G)' wahr ist, kann somit nicht nur – gemäß (E*) – durch die Feststellung ermittelt werden, dass die Berechnung von m+n zu derselben Ziffer führt wie das transitive Zählen der F∨G. Denn die Implikationsregel (+,∨,k) bestimmt, dass auch die Feststellung der Wahrheit der beiden Aussagen ‚Es gibt n F' und ‚Es gibt m (G∧¬F)' als Feststellung der Wahrheit von ‚Es gibt n+m (F∨G)' gilt. Und ferner wird durch (+,∨,k) und (E) die folgende

[2] Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Anzahlaussagen und Zahlengleichheitsaussagen ergibt sich hieraus im Übrigen unmittelbar die folgende auf Zahlengleichheitsaussagen bezogene Implikationsregel: (+,∨,#) ‚Es gibt ebenso viele F_1 wie G_1 ∧ Es gibt ebenso viele (F_2∧¬F_1) wie (G_2∧¬G_1)' impliziert ‚Es gibt ebenso viele F_1∨G_1 wie F_2∨G_2'.

Verifikationsmethode von ‚Es gibt k ($F \vee G$)' kodifiziert, welche der durch ($k,\vee$) kodifizierten Verifikationsmethode zwar eng verwandt ist, jedoch im Unterschied zu dieser auch die Verwendung einer durch den arithmetischen Anzahloperator ‚Es gibt m+n' gebildeten Aussage beinhaltet:

(1) Durch das transitive Zählen der F wird eine entsprechende einfache Anzahlaussage ‚Es gibt n F' erzeugt.

(2) Ferner wird durch das transitive Zählen der $G \wedge \neg F$ eine entsprechende einfache Anzahlaussage ‚Es gibt m ($G \wedge \neg F$)' erzeugt.

(3) Daraufhin wird von diesen beiden Aussagen gemäß ($+,\vee$) zu der arithmetische Anzahlaussage ‚Es gibt n+m ($F \vee G$)' übergegangen.

(4) Und durch *m*-faches intransitives Weiterzählen nach *n* wird eine Additionsaussage der Form ‚n+m=k*' erzeugt.

(5) Hiernach wird gemäß der Ersetzungsregel (E) zu der einfachen Anzahlaussage ‚Es gibt k* ($F \vee G$)' übergegangen.

(6) ‚Es gibt k ($F \vee G$)' gilt genau dann als wahr, wenn ‚k*=k'.

Die vorangegangen, auf Additionsterme bezogenen Überlegungen lassen sich auch auf die anderen arithmetischen Operationen wie etwa das Multiplizieren und das Potenzieren übertragen. Denn da etwa das Multiplizieren von *n* mit dem Faktor *m* als *m*-faches Addieren von *n* definiert ist, kann die *Multiplikation* durch die folgende Implikationsregel mit der *mehrfachen logischen Summe* verknüpft werden:

($\times$) ‚Es gibt n $F_1 \wedge$ Es gibt n ($F_2 \wedge \neg F_1$) $\wedge \ldots \wedge$ Es gibt n ($F_m \wedge \neg(F_{m-1} \vee \ldots \vee F_1)$)' impliziert ‚Es gibt n$\times$m ($F_1 \vee \ldots \vee F_m$)'.

In Verbindung mit der allgemeinen Ersetzungsregel (E) bestimmt auch diese Regel, dass die Feststellung der Wahrheit des Antecedens sowie die Feststellung der Wahrheit einer arithmetischen Gleichung der Form ‚n$\times$m=k' als Feststellung der Wahrheit der entsprechenden einfachen Anzahlaussage ‚Es gibt k ($F_1 \vee \ldots \vee F_m$)' gilt.

Die Folgen von Implikationsregeln wie ($+,\vee$) und ($\times$) für die Verifikation derjenigen Aussagen, die darin als Konsequenzen erscheinen, sind also immer dieselben: eine solche Implikationsregel erlaubt es, die Anzahl eines komplexen – also durch bestimmte logische Operationen – gebildeten Begriffs in der Weise zu ermitteln, dass nicht der Begriff selbst, sondern nur seine Teilbegriffe transitiv gezählt werden. Die Anzahl des komplexen Begriffs wird dann hieraus durch die Anwendung von arithmetischen Operationen errechnet, welche denjenigen logischen Operationen entsprechenden, nach denen der komplexe Begriff gebildet ist. Die empirische Anwendung arithmetischer Gleichungen auf Zahlaussagen kann somit ganz allgemein durch Bestimmungen zweierlei Art dargestellt werden: (i) Einerseits *die* allgemeine Ersetzungsregel (E), welche die Verwendung der durch arithmetische Operationszeichen gebildeten arithmetischen Anzahloperatoren bestimmt. (ii) Andererseits *verschiedene* Implikationsregeln in der Art von (+,∨), welche bestimmte arithmetische Operationen mit bestimmten logischen Operationen verknüpfen. Wie zuvor erläutert, stellen Bestimmungen dieser Art dar, in welcher Weise die arithmetischen Gleichungen die logischen Beziehungen zwischen Zahlaussagen kodifizieren. Und wie in Abschnitt 2.5 erläutert wurde, bestimmen logische Beziehungen zwischen verschiedenen Aussagen zum einen Zusammenhänge zwischen deren Verifikationsregeln. Zum anderen bestimmen sie darüber, welche wahrheitsfunktionalen Verknüpfungen dieser Aussagen synthetisch, und welche analytisch sind.

Im Hinblick auf die Verifikation ist zunächst festzuhalten, dass durch die der Einführung der Ersetzungsregel (E) sowie der entsprechenden Implikationsregeln in der Art von (+,∨) das Verifizieren arithmetischer Gleichungen zu einem Teil der Verifikation empirischer Anzahlaussagen gemacht wird. Denn wie zuvor erläutert, gilt hiernach z.B. die Feststellung der Wahrheit der arithmetischen Gleichung ‚68+57=125' sowie der Anzahlaussagen ‚Es gibt 68 F' und ‚Es gibt 57 G∧¬F' als Feststellung der Wahrheit der Anzahlaussage ‚Es gibt 125 (F∨G)'. Die arithmetische Rechenpraxis – also das Konstruieren von Zeichen nach syntaktischen Regeln – wird somit in die Praxis des Darstellens der Wirklichkeit integriert. Hierbei zeigen die zuvor angestellten Überlegungen, dass ein arithmetischer Anzahloperator wie etwa ‚Es gibt 68+57' lediglich eine Art *Dummy-Operator* ist. Denn der wesentliche Zweck einer durch einen solchen Operator gebildeten arithmetischen Anzahlaussage besteht darin, Übergänge zwischen eigentlichen Anzahlaussagen zu *vermitteln*. So kann also etwa von ‚Es gibt 68 F' und ‚Es gibt 57 G∧¬F' vermittelt durch den Zwischenschritt zu ‚Es gibt 67+58 (F∨G)' zu ‚Es gibt 125 (F∨G)' übergegangen werden.

In jedem Fall stellen die rechnungsbasierten Verifikationsmethoden einfacher Anzahlaussagen *Alternativen* zur grundlegenden Methode des transitiven Zählens dar. Dass es sich hierbei um alternative Methoden handelt, bedeutet, dass die Resultate beider Methoden stets übereinstimmen müssen. Und dass dem so sein muss, ist wiederum jeweils aus den entsprechenden Rechnungen ersichtlich. So ist also etwa aus dem zuvor dargestellten Beweis der Gleichung ‚68+57=125' ersichtlich, dass immer dann, wenn die Wahrheit von ‚Es gibt 125 (F∨G)' durch die Feststellung der Wahrheit von ‚68+57=125', ‚Es gibt 68 F', ‚Es gibt 57 G∧¬F' und ‚68+57=125' festgestellt wurde, auch das transitive Zählen der F∨G ‚Es gibt 125 (F∨G)' als wahr erweisen muss. Aufgrund dieses Zusammenhang zwischen den beiden Verifikationsmethoden von ‚Es gibt 125 (F∨G)' *erübrigt* also die Anwendung der einen Methode stets die der Anderen. Wenn also etwa die F und die G∧¬F bereits transitiv gezählt wurden, dann müssen, um ‚Es gibt 125 (F∨G)' zu verifizieren, nicht noch einmal die F∨G transitiv gezählt werden.

Implikationsregeln für bestimmte Aussagen bestimmen immer auch Tautologie- und Kontradiktionsregeln für die wahrheitsfunktionalen Verknüpfungen dieser Aussagen. So bestimmt insbesondere die Implikationsregel (k, ∨,+) die beiden folgenden Regeln:

Wenn ‚n+m=k' wahr ist, dann gilt:

‚¬(Es gibt n F ∧ Es gibt m (G∧¬F)) ∨ Es gibt k (F∨G)' ist tautologisch.

Wenn ‚n+m=k' falsch ist, dann gilt:

‚(Es gibt n F ∧ Es gibt m (G∧¬F)) ∧ Es gibt k (F∨G)' ist kontradiktorisch.

In Abschnitt 2.4 wurde bereits allgemein dargestellt, in welcher Weise sich Regeln dieser Art in der Verwendung der fraglichen Aussagen niederschlagen. So wurde dort erläutert, dass etwa die *wahrheitsfunktional-tautologische* Aussage ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' deshalb nichts über die Wirklichkeitsbeschaffenheit mitteilt, weil ihre Wahrheit allein durch die Betrachtung der Wahrheitswerttafel von ‚p∨¬p' – und also ohne jedwede Wetterbeobachtung – festgestellt werden kann. Analog hierzu teilt eine *arithmetisch-tautologische* Aussage der Form ‚¬(Es gibt 68 F ∧ Es gibt 57 (G∧¬F)) ∨ Es gibt 125 (F∨G)' deshalb nichts über die Wirklichkeitsbeschaffenheit, weil ihre Wahrheit bereits aus dem Beweis von ‚68+57=125' – und also ohne das transitive Zählen irgendwelcher Gegenstände – festgestellt werden kann. In beiden Fällen können also die Verifikationen auf die Konstruktionen bestimmter Zeichenfiguren – Wahrheitswerttafeln oder arithmetischer Beweise – reduziert werden.

In Abschnitt 2.4 wurde ebenso erläutert, dass bereits durch die Betrachtung der Wahrheitswerttafel von ‚p∧¬p' die Falschheit der Kontradiktion ‚Es regnet ∧ ¬ es regnet' einzusehen ist. Aus diesem Grund ginge eine entsprechende Mitteilung – eventuell mit dem Hinweis auf die fragliche Wahrheitswerttafel – unmittelbar zurück an ihren Absender. Analog hierzu ist bereits aus dem ‚68+57=126' als falsch erweisenden Beweis von 68+57=125 ersichtlich, dass eine Aussagen der Form ‚Es gibt 68 F ∧ Es gibt 57 (G∧¬F) ∧ Es gibt 126 (F∨G)' falsch ist. Eine entsprechende Mitteilung wäre demnach mit dem Verweis auf den fraglichen Beweis zurückzuweisen.

Angenommen, es läge ein Verwendungsverzeichnis der gesamten Sprache vor, welches also ein Kapitel für Zahlaussagen enthält, und ein anderes für arithmetische Gleichungen. In diesem Fall stellen also die Regeln für die empirische Anwendung arithmetischer Gleichungen – also Regeln wie (E) und (+,∨) – die Verbindung zwischen diesen beiden Kapiteln her. Und dies in der Weise, dass sie das Arithmetikkapitel als das auf Zahlaussagen bezogenen Implikationskapitel bestimmen.

9.3 Für eine Diskussion dessen, was man die *innermathematische* Anwendung mathematischer Aussagen nennen könnte, soll an diesem Abschnitt noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Arithmetik und Algebra zurückkommen werden. Auf der Grundlage dieser Diskussion soll dann auch zumindest angedeutet werden, wie die Zusammenhänge zwischen anderen Bereichen der Mathematik zu verstehen sind.

Ohne hierauf im Detail einzugehen, sei zuvor noch rasch bemerkt, dass algebraische Gleichungen in analoger Weise geometrisch und außermathematisch angewendet werden wie arithmetische Gleichungen. Die außermathematische Anwendung kann dabei durch das Folgende Prinzip kodifiziert werden: Wenn ‚Es gibt T_1 F‘ und ‚Es gibt T_2 G‘ wahr sind, und wenn ‚$T_1=T_2$‘ einer aus den arithmetischen Grundgesetzen ableitbaren algebraischen Gleichung genügt, dann ist ‚Es gibt ebenso viele F wie G‘ wahr. In diesem Sinn kann also etwa die Gleichung $n\times m = m\times n$ in der folgenden Weise außermathematisch angewendet werden: Wenn die Wahrheit zweier Aussagen der Form

$$\text{Es gibt } n\ F_1 \wedge \text{Es gibt } n\ (F_2 \wedge \neg F_1) \wedge \ldots \wedge \text{Es gibt } n\ (F_m \wedge \neg(F_{m-1} \vee \ldots \vee F_1))$$
$$\text{Es gibt } m\ G_1 \wedge \text{Es gibt } m\ (G_2 \wedge \neg G_1) \wedge \ldots \wedge \text{Es gibt } m\ (G_n \wedge \neg(G_{n-1} \vee \ldots \vee G_1))$$

festgestellt wurde, kann hieraus zunächst gemäß (×) übergegangen werden zu

$$\text{Es gibt } n\times m\ (F_1 \vee \ldots \vee F_m)$$
$$\text{Es gibt } m\times n\ (G_1 \vee \ldots \vee G_n)$$

Und hieraus kann dann wiederum gemäß dem zuvor genannten Prinzip (bezogen auf $n\times m = m\times n$) übergegangen werden zu:

$$\text{Es gibt ebenso viele } (F_1 \vee \ldots \vee F_m) \text{ wie } (G_1 \vee \ldots \vee G_n).$$

Seien nun ‚p' und ‚q' mathematische Aussagen, so kann das *Beweisen von* ‚q' *durch* ‚p' als *innermathematisches Anwenden von* ‚p' bezeichnet werden. In Arithmetik und Algebra besteht der Beweis einer Gleichung ‚$A_1=A_m$' durch eine andere Gleichung ‚$B_1=B_n$' aus einer ‚A_1' mit ‚A_m' verbindenden Gleichungskette, in der mindestens ein Übergang durch ‚$B_1=B_n$', jeder andere Übergang dagegen durch ein bestimmtes Rechengesetz vermittelt ist. Ein solcher Beweis hätte also die folgende Gestalt:

$$(1)\quad A_1 = ... = A_k(B_1) = A_k(B_n) = ... = A_m$$

In einem axiomatischen Kalkül besteht ein Beweis einer Aussage ‚q' durch eine andere Aussage ‚p' in einer ‚p' enthaltenden Aussagenfolge derart, dass alle von ‚p' verschiedenen Aussagen entweder Axiome sind, oder sich nach Schlussregeln aus vorangegangenen Aussagen ableiten lassen.

Falls ‚p' kein Axiom ist, ist ein solcher Beweis von ‚q' durch ‚p' noch *kein* Beweis von ‚q'. Denn zunächst beweist ein solcher Beweis nur die Implikation ‚$p \Rightarrow q$'. ‚q' selbst kann allerdings bewiesen werden durch die Kombination des Implikationsbeweises – also des Beweises von ‚q' durch ‚p' – mit einem Beweis von ‚p'. Hierfür muss also einfach die ‚p' beweisenden Folge mit der Folge, die ‚q' durch ‚p' beweist, verknüpft werden. Und wie in Abschnitt 7.2 erläutert wurde, erhält man dadurch einen arithmetischen bzw. algebraischen Beweis von ‚$A_1=A_m$' aus entsprechenden Beweisen von ‚$B_1=B_n \Rightarrow A_1=A_m$' und ‚$B_1=B_n$', dass man den durch ‚$B_1=B_n$' vermittelten Übergang im Beweis von ‚$B_1=B_n \Rightarrow A_1=A_m$' durch entsprechend dem Beweis von ‚$B_1=B_n$' zerlegt:

$$(2)\quad A_1 = ... = A_k(B_1) = A_k(B_2) = ... = A_k(B_{n-1}) = A_k(B_n) = ... = A_m$$

Andererseits kann natürlich dann, wenn ‚$B_1=B_n$' bereits bewiesen wurde, ein Beweis der Form (2) stets im Sinn von (1) abgekürzt werden. Die innermathematische Anwendung einer mathematischen Aussage ‚p' besteht also darin, ‚p' wie ein Axiom zu behandeln, um dadurch die Beweise anderer Aussagen *abzukürzen*.

Wie Abschnitt 7.1 gesehen, schematisiert der algebraische Beweis einer algebraischen Gleichung wie etwa

$$(B)\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

die arithmetischen Beweise der (B) entsprechenden arithmetischen Gleichungen. Aus diesem Grund kann (B) nicht nur zur Abkürzung algebraischer Beweise, sondern auch zur Abkürzung arithmetischer Beweise verwendet werden. D.h.: (B) kann in der Arithmetik als zusätzliches Umformungsparadigma verwendet werden, da sich durch die durch (B) lizensierten arithmetischen Umformungen keine arithmetische Gleichung konstruieren lässt, welche sich nicht bereits aus den arithmetischen Grundgesetzen konstruieren ließe.

Nun werden algebraische Gleichungen nicht nur als Umformungsparadigmen für arithmetische Gleichungen, sondern für Gleichungen aus *verschiedenen* Kalkülen verwendet. Denn auch die Regeln für das Rechen mit anderen Zahlenarten, mit Matrizen oder mit Funktionen lassen sich durch bestimmte algebraische Gleichungen kodifizieren. Aus diesem Grund schematisieren auch algebraische Beweise nicht nur arithmetische Beweise, sondern die Beweise verschiedener Kalküle. Die verschiedenen, sogenannten algebraischen *Theorien* über Gruppen, Ringe oder Körper sind in diesem Sinn *Meta-Kalküle*. Zunächst sind sie selbst Kalküle, insofern das Ableiten von Theoremen innerhalb einer solchen Theorie im Konstruieren von Zeichenfiguren (Beweisen) nach bestimmten syntaktischen Regeln besteht. Andererseits kodifizieren sie die Rechenregeln anderer Kalküle und schematisieren deren Beweise. D.h., die verschiedenen algebraischen Theorien klassifizieren Gleichungskalküle gemäß deren Rechenregeln.

Eine naheliegende Verallgemeinerung, welche hier nicht weiter untersucht werden kann, wäre die, dass nicht nur die speziellen algebraischen Theorien, sondern alle sogenannten axiomatische Theorien *Meta-Kalküle* in den zuvor geschilderten Sinn sind. Hiernach wären also auch formale Theorien wie etwa die Theorie der Hilberträume oder die Maßtheorie als Kalküle aufzufassen, deren Beweise die Beweise anderer Kalküle schematisieren und deren Theoreme daher die Regeln dieser Kalküle kodifizieren. Dabei ist wieder darauf hinzuweisen, dass die in der Mathematik übliche Rede von der Existenz eines *Modells* einer bestimmten, axiomatischen Theorie nicht im platonistischen Sinn misszuverstehen ist. Was mit solchen Redeweisen gemeint ist, ist lediglich, dass es Kalküle mit bestimmten Regeln gibt. Anders als etwa Burgess/Rosen (2005, S. 516) anzunehmen scheinen, berichtet ein Mathematiker, der die Existenz einer Gruppe dieser oder jener Art verkündet, nicht von der Entdeckung einer Struktur abstrakter Gegenstände, welche durch die fraglichen Gruppenaxiome wahrheitsgemäß beschrieben werden kann. Denn die Entdeckung einer Gruppe der fraglichen Art besteht in der Feststellung, dass sich sie Regeln eines bestimmten Kalküls durch die Gruppenaxiome kodifizieren lassen. Hierbei ist also auszurechnen, dass der fragliche Kalkül bestimmten Bedingungen genügt. Ein Modell einer axiomatischen Theorie ist ein Kalkül bestimmter Art.

Es bleibt also dabei: das Betreiben von Mathematik ist immer ein bloß formales Operieren – also ein Rechnen – mit Zeichen; und niemals ein Untersuchen vermeintlich bezeichneter Gegenstände. Und das scheint es zu sein, was Wittgenstein meint, wenn er in (PG, S. 468) behauptet, dass in der Mathematik alles Algorithmus und nichts Bedeutung sei. Mühlhölzer hält diese These für übertrieben, weil es seiner Ansicht nach in der Mathematik neben den rechnerisch-algorithmischen Methoden auch noch „begriffliche Methoden" gäbe (vgl. Mühlhölzer 2010, S. 15). Es ist allerdings nicht ganz klar, welche Methoden er meint. Und der Verdacht liegt nahe, dass die begrifflichen Methoden, auf die Mühlhölzer anspielt, einfach das sind, was Wittgenstein, Algorithmen mit Worten nennt (PG, S. 468).

9.4 In diesem Abschnitt soll die 9.2 entwickelte Auffassung der außermathematischen Anwendung der Arithmetik auf der Grundlage einer kritischen Untersuchung alternativer empiristischer, logizistischer und formalistischer Auffassungen weiter erläutert werden.

Gemäß *empiristischer* Auffassungen der Mathematik, wie sie etwa von Mill in (1843) vertreten wird, wird eine mathematische Aussage durch ihre aussermathematischen (empirischen) Anwendungen bestätigt bzw. wiederlegt. Wie Skorupski in (2005) zu Recht bemerkt, vertraten die logischen Positivisten keine empiristische Position in der Philosophie der Mathematik. Als moderner Empirist bezüglich der Mathematik kann dagegen Quine gelten. Auf seine in (1951) skizzierte Position soll hier jedoch deshalb nicht ausführlich eingegangen werden, weil der Holismus, auf dem sie beruht, schon ausführlich kritisiert wurde (vgl. z.B. Glock 2003, Kap. 3; Schroeder 2009). Nach empiristischer Auffassung wären Wahrheitsbedingungen mathematischer Aussagen also durch die Ergebnisse der Anwendung der fraglichen Aussagen zu bestimmen. Im Fall einfacher Additionsaussagen könnte eine solche Bestimmung durch die folgenden beiden Schritte vorgenommen werden: Zunächst werden Additionsaussagen durch die entsprechenden arithmetischen Tautologien *definiert*. Dann werden diese wiederum synthetisch aufgefasst und also nicht als logische Schlussregeln, sondern als empirische Hypothesen *behandelt*. Die Wahrheitsbedingungen wären hiernach also wie folgt anzugeben:

‚n+m=k' ist wahr ⇔ Für beliebige ‚F' und ‚G' gilt:
‚¬(Es gibt n F ∧ Es gibt m (G∧¬F)) ∨ Es gibt k (F∨G)' ist immer und überall wahr.

Dementsprechend könnte also etwa ‚68+57=125' solange als wahr gelten, bis ein Gegenbeispiel, also eine falsche Aussagen der Form ‚¬(Es gibt 68 F ∧ Es gibt 57 (G∧¬F)) ∨ Es gibt 125 (F∨G)' bekannt ist. Und für die Verifikation von '68+57=125' wären also nach empiristischer Auffassung widerholt drei Anzahlaussagen der Form ‚Es gibt 68 F', ‚Es gibt 57 (G∧¬F)' und ‚Es gibt 125 (F∨G)‘ durch transitives Zählen zu verifizieren. Und dabei würde ‚68+57=125‘ solange als wahr gelten, wie hierbei das transitive Zählen der F∨G stets zu 125 führt, wann immer das transitive Zählen der F zu 68 und das transitive Zählen der G∧¬F zu 57 führt. Die empiristische Konzeption hätte somit eine empirische *Heteronomie* arithmetischer Gleichungen zur Folge, insofern deren Wahrheitswerte hiernach zwar nicht von der Beschaffenheit einer vermeintlichen *abstrakten* Wirklichkeit, aber von der Beschaffenheit der *raumzeitlichen* Wirklichkeit abhängig wären.

Eine solche Praxis, in der vermutete oder beobachtete Regularitäten des transitiven Zählens in arithmetischer Notation – also in der Form entsprechender Gleichungen – formuliert werden, ist zwar nicht undenkbar. Aber natürlich werden arithmetische Aussagen *de facto* nicht in dieser Weise verwendet. Die tatsächliche Verifikation arithmetischer Aussagen erfolgt nicht durch die Verifikation irgendwelcher Anzahlaussagen, sondern durch die Konstruktion eines entsprechenden Beweises; im Fall einfacher Additionsaussagen also durch das intransitive Weiterzählen oder eine verwandte Rechentechnik. Und wie in Abschnitt 9.2 erläutert wurde, wird die Falschheit einer Anzahlaussage der Form ‚¬(Es gibt 68 F ∧ Es gibt 57 (G∧¬F)) ∨ Es gibt 125 (F∨G)‘ logisch ausgeschlossen. Sollte das transitive Zählen der F∨G nicht zu 125 führen, obwohl das transitive Zählen der F zu 68 und das transitive Zählen der G∧¬F zu 57 führt, dann wird – aufgrund des Beweises von ‚68+57=125‘ – darauf geschlossen, dass zumindest einer der fraglichen Zählvorgänge fehlerhaft gewesen sein muss.

Die z.B. von Russell in (1910) und in (1937) vertretene *logizistische* Position stimmt mit der hier entwickelten Auffassung in zwei grundlegenden Punkten überein. Zum einen sind arithmetische Gleichungen auch nach logizistischer Auffassung analytisch; also entweder tautologisch oder kontradiktorisch. Zum anderen betrachten auch Logizisten die zuvor als tautologisch charakterisierten Anzahlaussagen als tautologisch. In diesen beiden Punkten weicht der Logizismus also vom Empirismus ab. Übereinstimmend mit der zuvor geschilderten empiristischen Konzeption und entgegen der hier vertretenen Position sind arithmetischen Gleichungen jedoch auch nach logizistischer Auffassung durch die entsprechenden arithmetischen Anzahltautologien zu *definieren*. Die Umsetzung dieser Konzeption erfordert daher die Erklärung eines Kalküls, in dem sich die fraglichen Anzahlaussagen als tautologisch erweisen lassen, ohne dabei Bezug auf die arithmetischen Operationen zu nehmen.

Auf die genaue Definition dieses Kalküls muss an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Durch Bezug auf die Idee eines Verwendungsverzeichnisses für die gesamte Sprache kann der konzeptionelle Unterschied zu der hier vertretenen Wittgensteinschen Position jedenfalls wie folgt beschrieben werden. Der hier vertretenen Auffassung zu Folge erhält die

Arithmetik ein eigenes, vom Kapitel der Anzahlaussagen unabhängiges Kapitel, das erst durch zusätzliche Regeln (in der Art von (E) und (k, ∨,+)), welche arithmetische und logische Operationen miteinander verknüpfen zum Implikationskapitel der Anzahlaussagen gemacht wird. Nach logizistischer Konzeption ist dagegen zunächst das Implikationskapitel von Anzahlaussagen ohne Bezug auf arithmetische Operation zu erstellen. Dann werden die Tautologie- bzw. Implikationsregeln der Anzahlaussagen durch bestimmte arithmetische Gleichungen definitorisch abgekürzt. Und hierdurch werden dann also die arithmetischen Operationen durch Bezug auf diejenigen logischen Operationen definiert, durch welche die fraglichen Anzahltautologien gebildet sind.

Für die Bewertung der logizistischen Position ist zunächst noch einmal daran zu erinnern, dass eine tautologische Aussage wie etwa ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' von einem entsprechenden Tautologiesatz zu unterscheiden ist, also von einem Satz in der Art von „‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' ist tautologisch', welcher eine andere Aussage als ‚tautologisch' charakterisiert. Auch wenn beide Aussagen gegebenenfalls tautologisch – also allein aufgrund ihrer Wahrheitsbedingungen wahr – sind, ist die einfache Tautologie ‚Es regnet ∨ ¬ es regnet' ein leere Behauptung, während der darauf bezogenen Tautologiesatz Ausdruck der entsprechenden semantischen Regel ist, dass die fragliche Behauptung leer ist. Und es scheint nun, dass für die Identifikation mit arithmetischen Gleichungen überhaupt nur die *allgemeinen Tautologiesätze* in Frage kommen. So kann also z.B. ‚68+57=125' nicht eine spezielle Tautologie wie etwa die folgende abkürzen: ¬(Es gibt 68 Jungs ∧ Es gibt 57 Mädchen) ∨ Es gibt 125 (Jungs ∨ Mädchen)'. Vielmehr kann nur gemeint sein, dass die Gleichung für den folgenden allgemeinen Tautologiesatz steht: Aussagen der Form ‚¬(Es gibt 68 F ∧ Es gibt 57 (G∧¬F)) ∨ Es gibt 125 (F∨G)' sind tautologisch für beliebige ‚F' und ‚G'. Diese Identifikation ist auch insofern berechtigt, als arithmetische Gleichungen im empirischen Diskurs tatsächlich in diesem *semantisch-normativen* Sinn – also zum Ausdruck von Implikations-, Tautologie- und Kontradiktionsregeln – verwendet werden. Denn wie in Abschnitt 9.2 erläutert wurde, werden sie zitiert um Übergänge zwischen Anzahlaussagen zu rechtfertigen bzw. zu kritisieren, oder um bestimmte Kombinationen von Anzahlaussagen auszuschließen. Der Unterschied zwischen der logizistischen und der hier vertretenen Auffassung bezieht sich also nicht auf diese normative Verwendung arithmetischer Gleichungen. Vielmehr bezieht er sich auf die *assertorische* Verwendung arithmetischer Gleichungen, d.h. also auf deren Verifikation.

Gegen die Auffassung, dass der Beweis einer arithmetischen Gleichung – oder besser vielleicht: deren eigentlicher Beweis – darin besteht, eine entsprechende Anzahlaussage als tautologisch zu beweisen, richtet sich Wittgensteins *Übersehbarkeitsargument* in (BGM, III §§1-63;

vgl. insb. BGM, III §5). Diesem Einwand zu Folge wären die fraglichen Beweiskonstruktionen – wenn von ein paar elementaren Fällen abgesehen wird – derart kompliziert, dass sie keine Beweis*kraft* mehr besäßen. Eine Untersuchung dieses in der Sekundärliteratur vieldiskutierten Einwands würde an dieser Stelle jedoch zu weit führen.[3] Für das hier verfolgte Ziel ist es auch nicht erforderlich, die von diesem Einwand anscheinend implizierte *Inkohärenz* der logizistischen Position zu zeigen. Vielmehr genügt es, deren *Inakkuratheit* nachzuweisen. Und dass die assertorische Verwendung arithmetischer Gleichungen vom Logizismus nicht verifikationsakkurat dargestellt wird, ist auch klar. Denn auch wenn tatsächlich verschiedene mehr oder weniger formale Rechentechniken praktiziert werden, arbeiten doch alle diese Techniken allein mit dem arithmetischen Vokabular und nicht etwa den logischen Konstanten oder mit Variablen für Prädikate.

Fairerweise muss an dieser Stelle gesagt werden, dass mit der Entwicklung des logizistischen Kalküls auch gar nicht der Anspruch erhoben wurde, durch den fraglichen Kalkül diejenigen Rechenregeln zu kodifizieren, die wir in der Rechenpraxis tatsächlich befolgen. Zumindest eines der hierbei verfolgten Ziele bestand allerdings darin, die Anwendung der Arithmetik schon im Kalkül sichtbar zu machen (vgl. Russell 1919, Kap. 9/10; Marion 2006). Und eben dadurch, dass in diesem Kalkül die Beweise arithmetischer Gleichungen bereits ausdrücklich auf deren außermathematische Anwendung verweisen, wird der tatsächliche Zusammenhang zwischen der Arithmetik und ihrer Anwendung unangemessen dargestellt. Denn die arithmetischen Rechenregeln beziehen sich weder im empiristischen, noch im logizistischen Sinn auf die Anwendung arithmetischer Gleichungen, da deren Verifikationen, wie gesehen, nicht in Feststellungen bestehen, ob bestimmte Anzahlaussagen wahr oder tautologisch sind. Auch wenn Sinn und Zweck des Konstruierens arithmetischer Gleichungen auf dem Umstand beruht, dass die Konstruierbarkeit einer arithmetischen Gleichung äquivalent mit der Geltung einer entsprechenden Tautologieregel ist, erfolgen die fraglichen Konstruktionen nach Regeln, die nur auf die arithmetischen Zeichen und nicht schon auf diese außermathematischen Anwendungen bezogen sind (PB, §107). Und das scheint es zu sein, was Wittgenstein meint, wenn er sagt, die Anwendung der Arithmetik müsse für sich selbst sorgen (PB, §109, PG, II §15; BGM, III §4).

Die Entkoppelung der Arithmetik von ihrer Anwendung findet sich auch bei den von Frege kritisierten Formalisten wie Thomae oder Heine in (vgl. Frege 1893-1903, III.1 §§86-137). Der *Formalismus* ist zunächst von der *richtigen* Beobachtung geleitet, dass das Betreiben der Arithmetik (bzw. der Mathematik im Allgemeinen) im bloßen Manipulieren von Zeichen allein nach syntaktischen Regeln besteht. Zum Teil wohl aus dem Grund, dass die außermathematische Anwendung der mathematischen Aussagen für die Korrektheit dieser Manipulationen und damit

[3] Siehe hierzu z.B. Frascolla 1994, S. 152 ff.; Mühlhölzer 2006; und Marion 2011.

für die Wahrheit der mathematischen Aussagen irrelevant ist, wird die außermathematische Anwendung vom Formalismus komplett ignoriert und die Mathematik als ein bloßes Zeichen*spiel* aufgefasst.

Gegen die These der Unabhängigkeit der Arithmetik gegenüber ihrer Anwendung könnte man den historisch-genetischen Einwand erheben wollen, dass das Rechnen bereits ursprünglich mit der außermathematischen Anwendung verknüpft war und erst später auch unabhängig von dieser Anwendung praktiziert und weiterentwickelt wurde (vgl. Becker 1975, S. 18). Hierauf kann jedoch erwidert werden, dass die Arithmetik immer schon in dem Sinn unabhängig von ihrer Anwendung war, dass die Korrektheit des Rechnens auch dann, wenn sie nur Teil der Verifikation empirischer Aussagen ist, stets allein für sich genommen bewertbar ist. Zumindest die *Möglichkeit der Isolierung* der Arithmetik von ihrer außermathematischen Anwendung ist der Arithmetik also wesentlich.

Dennoch kritisiert Wittgenstein die formalistische These, wonach die Arithmetik im Besonderen und die Mathematik im Allgemeinen ein Spiel sei, durch Bezug auf deren außermathematische Anwendung, also durch den Bezug auf den Zivilgebrauch der mathematischen Zeichen. Wittgenstein zu Folge ist ihre außermathematische Anwendung der Mathematik insofern wesentlich, als erst diese Anwendung das formalistische Zeichenspiel zur Mathematik mache (BGM, V §2; Waismann 1970, 212 ff.). Zum besseren Verständnis dieses Arguments ist zunächst an die in Abschnitt 9.1 erläuterte Unterscheidung zu erinnern zwischen mathematischen Aussagen einerseits und empirischen Aussagen über das Betreiben von Mathematik andererseits. Dass ihre außermathematische Anwendung der Mathematik wesentlich ist, soll nicht bedeuten, dass der Wahrheitswert einer mathematischen Aussage davon abhängt, was deren außermathematische Anwendung ergibt. Das wäre die empiristische Position. Gemeint zu sein scheint vielmehr Folgendes: ob eine Aussage, deren Wahrheitswert nur von der Konstruierbarkeit einer bestimmten Zeichenfigur abhängt, als ‚mathematisch' bezeichnet werden kann, ist davon abhängig, ob die Aussage als Regel für den empirischen Diskurs verwendet wird. D.h., dass das Konstruieren von Zeichen nur unter der Bedingung als ein *Betreiben von Mathematik* und nicht bloß als ein *Spiel mit Zeichen* bezeichnet werden kann, wenn es *nicht nur* für sich genommen praktiziert wird, sondern auch Teil der Verifikation empirischer Aussagen und damit der Darstellung der Wirklichkeit ist. Angenommen etwa, in einer bestimmten Gemeinschaft würden Zeichenfiguren nach den arithmetischen Regeln konstruiert, ohne dass die entsprechenden Gleichungen jemals als Implikationsregeln für Anzahlaussagen angewendet werden. Eine Aussage wie ‚68+57=125' würde also zwar konstruiert werden und dementsprechend auch als wahr gelten. Aber ihre Verifikation wäre niemals Teil der Verifikation von Anzahlaussagen; es würde nicht nach ihr geschlossen; und Anzahlaussagen würden nicht durch Bezug auf sie als tautologisch oder kontradiktorisch identifiziert. Dann, so scheint Wittgenstein zu meinen, wäre dies ein Grund dafür, die Aussage ‚68+57=125' nicht mehr als ‚mathematisch' und ihre Verifikation nicht mehr als ein ‚betreiben von Mathematik' zu bezeichnen. Nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Rede von Mathematik ist durch die außermathematische Anwendung definiert.

Wie Wittgenstein selbst zugibt, ist diese These deshalb zu stark, weil nicht alle Bereiche der Mathematik außermathematische Anwendungen haben (BGM, V §5). Aus diesem Grund müsste diese These dahingehend abgeschwächt werden, dass ein Kalkül nicht nur dann ‚mathematisch' zu nennen ist, wenn seine Aussagen auch außermathematisch angewendet werden, sondern auch dann, wenn er in systematischen Zusammenhängen zu anderen Kalkülen mit solchen Anwendungen steht (BGM, VII §33). Wenn es unter den wechselseitig auf einander bezogenen Kalkülen einer bestimmten Gemeinschaft keinen einzigen gäbe, der eine außermathematische Anwendung hätte, dann könnte keiner von ihnen als ‚mathematisch' bezeichnet werden. Abschließend kann also festgehalten werden, dass der formalistische Punkt grundsätzlich richtig ist, wonach das Rechnen – etwa in Unterricht und Forschung – auch *isoliert* von der außermathematischen Anwendung betrieben wird, d.h. also nicht als Teil der Verifikation von Zahlaussagen. Dennoch unterscheidet sich die Arithmetik dadurch von einem Spiel mit Zeichen, dass die fraglichen Zeichenkonstruktionen auch in dieser Weise verwendet werden. Das unangewendete Rechnen ist eine Art Trockenübung; der Rechenunterricht eine Vorbereitung für den Ernstfall.

Und diese Überlegung kann auch noch einmal gegen den Platonismus gerichtet werden. Denn wenn die soeben als solche identifizierte Übertreibung um der größeren Deutlichkeit Willen zugelassen wird, dann könnte man sagen: Dass ein Zeichen ein mathematisches Zeichen ist, bedeutet nicht, dass es der Beschreibung einer abstrakten, mathematischen Wirklichkeit dient. ‚Mathematisch' sind vielmehr diejenigen Zeichen für die Beschreibung der raumzeitlichen Wirklichkeit, mit denen wir mathematisieren.

9.5 Die zweite Hauptthese von Wittgensteins Philosophie der Mathematik lautete, dass mathematische Aussagen *Normen der Darstellung* sind (BGM, III §§26-41; BGM, V §§41-45; BGM, VII §§1-7). Auf der Grundlage der Untersuchungen der vorangegangenen Abschnitte kann diese These zumindest in Bezug auf die *Arithmetik* bereits als bewiesen gelten. Denn wie gesehen, werden arithmetische Gleichungen in ihrer geometrischen und außermathematischen Anwendung in diesem Sinn als grammatische Sätze verwendet, also als Ausdruck von *Schlussregeln* zwischen empirischen Aussagen. So besteht etwa die geometrische Anwendung von ‚68+57=125' im Wesentlichen darin, darauf hinzuweisen, dass eine empirische Aussage der Form ‚N.N.

berechnet 68+57‘ die Aussage ‚N.N. erhält 125‘ impliziert und die Aussage ‚N.N. erhält 126‘ ausschliesst. Umgangssprachlich würde man diese von ‚68+57=125‘ bestimmte Implikationsregel auch durch eine Formulierung wie ‚Wenn man 68+57 berechnet, dann muss man 125 erhalten‘ ausdrücken. Die Exklusionsregel könnte man dagegen auch wie folgt formulieren: man kann nicht 68+57 berechnen und 126 erhalten. Und die außermathematische Anwendung von ‚68+57=125‘ besteht im Wesentlichen darin, darauf hinzuweisen, dass eine empirische Anzahlaussage wie ‚Es gibt 68 Jungs und 57 Mädchen‘ die Aussage ‚Es gibt 125 Kinder‘ impliziert und die Aussage ‚Es gibt 126 Kinder‘ ausschließt. Diese auf Anzahlaussagen bezogenen Implikations- und Exklusionsregeln würde man umgangssprachlich eventuell auch wie folgt ausdrücken: 68 Gegenstände und 57 andere Gegenstände ergeben 125 – und nicht: 126 – Gegenstände.

Ferner muss Wittgenstein auch darin Recht gegebenen werden, dass auch die im Rahmen dieser Arbeit bislang nicht berücksichtigten Aussagen der *Geometrie* Darstellungsnormen in fraglichen Sinn sind. Die außermathematische Anwendung dieser Aussagen besteht in der Formulierung von Schlussregeln für empirische Aussagen über die Form und Größe raumzeitlicher Gegenstände (PB, §178; PG, II §17; Baker/Hacker 1985, S. 271). So wird etwa die geometrische Aussage ‚Scheitelwinkel sind gleich groß‘ außermathematisch benutzt, um darauf hinzuweisen, dass eine empirische Aussage der Form ‚α und β sind Scheitelwinkel‘ die Aussage ‚α und β sind gleich groß‘ impliziert und die Aussagen ‚α ist grösser als β‘ und ‚α ist kleiner als β‘ ausschließt. Und in Kombination mit einer Additionsaussage wie ‚100+80=180‘ wird etwa die geometrische Aussage ‚Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°‘ dafür benutzt, um darauf hinzuweisen, dass zwei Aussagen der Form

α, β und γ sind Innenwinkel eines Dreiecks.
Die Winkelsumme von α und β beträgt 100°.

die Aussage

γ ist 80° groß.

implizieren und z.B. die Aussage ‚γ ist 81° groß’ ausschließen.

Offenbar werden auch andere Bereiche der Mathematik in diesem Sinn außermathematisch angewendet. So impliziert etwa die Aussage ‚N.N. hat eine Stunde für 124 km lange Strecke Zürich-Bern benötigt‘ nach dem Mittelwertsatz der *Differentialrechnung* die Aussage ‚Zumindest einen Augenblick betrug die Momentangeschwindigkeit von N.N. 124 km/h‘. Und ausgeschlossen wäre damit die Aussage ‚N.N. hat auf seiner Fahrt permanent das Tempolimit von 120km/h respektiert'. Und auch wenn die entsprechenden Untersuchungen der außermathematischen Anwendung mathematischer Aussagen im Rahmen diese Arbeit auf Arithmetik und Algebra beschränkt werden mussten, so wurde in Abschnitt 9.3 zumindest angedeutet, dass auch formale mathematische Theorien insofern mittelbar außermathematische Anwendungen haben, als sie Regeln für diejenigen Kalküle kodifizieren, die unmittelbar außermathematisch angewendet werden.

Die außermathematische Anwendung mathematischer Aussagen besteht darin, diejenigen Schlussregeln *in Kraft zu setzen*, deren Geltung aus den Beweisen der Aussagen ersichtlich ist. Wie bereits in Abschnitt 3.1 erläutert, kann ein solches in-Kraft-setzen mit Wittgenstein als *Begriffsbildung* bezeichnet werden. Die Rede von Begriffen erscheint zwar eher in Bezug auf die Geometrie als in Bezug auf die Arithmetik angemessen, da nur Erstere logische Regeln für *Prädikate*, letztere dagegen Regeln für Anzahl*operatoren* (bzw. Quantoren) bestimmt. In jedem Fall gilt aber, dass eine Implikationsregel die Wahrheit des Antecedens als eine hinreichende Bedingung und damit als *neues Kriterium* für die Wahrheit des Sukzedens bestimmt. Und umgekehrt bestimmt sie die Wahrheit des Sukzedens als notwendige Bedingung für die Wahrheit des Antecedens. Es scheint daher zulässig, dass Wittgenstein seine zweite Hauptthese alternativ auch in der Weise ausdrückt, dass er sagt, die Mathematik bilde Begriffe (BGM, VII §67).

Gerade in dieser Formulierung ist Wittgensteins These verschiedentlich missverstanden worden. Zu einer weiteren Klärung seiner Konzeption kann insbesondere die Beseitigung eines Missverständnisses beitragen, welches sich bei Hacking (1985) und Bouveresse (1988, Kap. 3) findet. Deren erste ebenso triviale wie berechtigte Beobachtung ist die, dass die durch die Anwendung der Mathematik modifizierten Begriffe und Aussagen natürlich bereits Kriterien bzw. Wahrheitsbedingungen haben. Die Verwendung der Anzahloperatoren ist durch das transitives Zählen definiert. Die Rede von Längen und von Winkelgrößen ist durch die entsprechenden Techniken der Längen- und Winkelmessung bestimmt. Beide Autoren scheinen dann einerseits Dummetts Auffassung zuzustimmen, wonach Wittgenstein deshalb nicht gemeint haben kann, dass die von der Mathematik bestimmten neuen Kriterien einfach in jedem Fall ihrer Anwendung mit den alten Kriterien *übereinstimmen*, weil dieser Punkt trivial wäre (vgl. Bouveresse 1988, S. 71; Dummett 1973, S. 300/1 und 1993, S. 450). Andererseits scheint klar, dass die alten und neuen Kriterien sich in ihren Anwendungen auch nicht *widersprechen* sollen. Die scheinbar einzige Lösung dieser Schwierigkeit, welche dann von Hacking und Bouveresse auch als solche vorgeschlagen wird, besteht dann in der Annahme, dass die neuen Kriterien auch in solchen Fällen anwendbar sind, in denen die Alten keine – oder zumindest keine eindeutig bestimmte – Entscheidung liefern. Die durch den Beweis einen mathematischen Aussage herbeigeführte

Begriffsbildung besteht demnach darin, bestimmte *Vagheiten* zu beseitigten, welche vor der Begriffsbildung eventuell gar nicht bemerkt wurden (vgl. Bouveresse 1988, S. 70ff.).

Überzeugende Beispiele für problematische Fälle dieser Art – also für Fälle, die nicht durch das alte Kriterium, sondern erst durch das neue, mathematische bestimmte Kriterium eindeutig entschieden werden können – werden jedoch nicht angegeben. Die von Hacking und Bouveresse vorgeschlagene Lösung ist eine rein theoretische Konstruktion, deren entscheidender Fehler bereits in der Akzeptanz von Dummetts Auffassung besteht. Denn *trivial* oder nicht: *richtig* ist jedenfalls, dass die Anwendungen der neuen, mathematisch bestimmten Kriterien stets mit den Anwendungen der alten Kriterien übereinstimmen müssen (vgl. Hacker 1997, S. 500). Wie in Abschnitt 9.2 erläutert wurde, ist es ja genau das, was der Beweis einer mathematischen Aussage zeigen soll. Der Beweis zeigt, dass das Befolgen zweier Verifikationsmethoden stets zu demselben Ergebnis führen muss. Und damit etabliert er die eine Verifikationsmethode als *Alternative* zu der Anderen. Additionsaussagen bestimmen alternative Verifikationsmethoden für Anzahlaussagen. So kann ‚Es gibt 125 Kinder' auch ohne das transitive Zählen der Kinder verifiziert werden, indem stattdessen je einmal die Jungen und Mädchen gezählt werden, um dann die Anzahl der Kinder hieraus zu errechnen. Analog hierzu bestimmt der Scheitelwinkelsatz, dass die Größe eines Winkels α auch dadurch festgestellt werden kann, dass nicht α, sondern der entsprechenden Scheitelwinkel gemessen wird. Und der Innenwinkelsatz für Dreiecke bestimmt, dass die Größe eines Innenwinkels α auch ohne dessen Messung festgestellt werden kann, indem statt dessen die beiden anderen Innenwinkel β und γ gemessen und die Größe von α hieraus nach der Formel $\alpha=180-(\beta+\gamma)$ errechnet wird.

Der mathematisch bewiesene, alternative Charakter zweier Verifikationsmethoden ermöglicht es, die eine Methode als *Kontrolle* oder als *Ersatz* der Anderen zu benutzen. Denn zum einen gilt: wenn die Befolgungen zweier Verifikationsmethoden, welche durch eine mathematische Aussagen als wechselseitige Alternativen bestimmt sind, nicht zu demselben Ergebnis führen, dann wird darauf geschlossen, dass zumindest einer der beiden Verifikationsvorgänge *fehlerhaft* gewesen sein muss. Angenommen etwa, das Zählen der Kinder führt nicht zu der Zahl, welche die Summe der beiden Zahlen ist, zu denen das Zählen der Jungen und Mädchen führt. Dann wird darauf geschlossen, dass sich bei mindestens einem der fraglichen Zählvorgänge verzählt wurde. Und ebenso wird auf entsprechende Messfehler geschlossen, falls etwa die Messung von Scheitelwinkeln nicht zu identischen Größen oder die Messung von Innenwinkeln eines Dreiecks nicht zu einer Summe von 180° führt (vgl. PG, II §17). D.h.: Wenn eine Verifikationsmethode eine Alternative zu einer Anderen ist, und *beide* Verifikationsverfahren durchgeführt werden, dann *kontrollieren* die beiden Durchführungen einander wechselseitig.

Es ist vielleicht nicht unwichtig, in diesem Zusammenhang darauf hinzuweisen, dass die neuen, rechnungsbasierten Kriterien, zwar neue Fehlerkriterien, jedoch nicht neue Fehler*arten* definieren. So ist etwa das transitive Zählen der F dadurch definiert, dass jedes F genau einmal gezählt wird. Wenn von Fehlern hinsichtlich der Reihenfolge der aufgesagten Ziffern abgesehen wird, dann besteht das Verzählen also in jedem Fall darin, mindestens ein F mehrfach oder aber gar nicht zu zählen. Die Berechnung der Anzahl der Kinder aus den Anzahlen der Jungen und Mädchen verweist gegebenenfalls darauf, dass bei der Zählung der Kinder eines mehrfach gezählt oder ausgelassen wurde. Und die Neuheit des rechnungsbasierten Fehlerkriterium besteht darin, dass auf ein Verzählen beim Zählen der Kinder auch dann geschlossen werden kann, wenn ein solcher Fehler weder bei der fraglichen Zählung der Kinder wahrgenommen, noch durch eine Wiederholung der Zählung der Kinder offenbart wurde.

Zum anderen gilt: wenn zwei Verifikationsmethoden durch eine mathematische Aussagen als wechselseitige Alternativen bestimmt sind, dann muss stets nur *eine* durchgeführt werden, um den gesuchten Wahrheitswert zu ermitteln. Die Durchführung der einen Methode *erübrigt* also die der Anderen. Um ‚Es gibt 125 Kinder' zu verifizieren, müssen die Kinder nicht gezählt werden, falls bereits die Jungen und Mädchen gezählt wurden. Von zwei Scheitelwinkeln muss stets nur Einer gemessen werden. Und ebenso muss der dritte Innenwinkel eines Dreiecks nicht mehr gemessen werden, wenn die Grössen der beiden anderen Innenwinkel bereits ermittelt wurden. Ironischerweise missinterpretiert und kritisiert Dummett Wittgensteins Auffassung gerade in dem Aufsatz, in dem er nach der *praktischen Rechtfertigung* des deduktiven Schließens fragt (Dummett, (1973) S. 297 ff.). Dabei ergibt sich der eigentliche praktische Zweck des deduktiven Schließens eben gerade aus dem alternativen Charakter alter und neuer Kriterien; also daraus, dass die durch Durchführung einer Verifikationsmethode, durch die einer Anderen *ersetzt* werden kann. Denn wenn feststeht, dass zwei Wege zum selben Ziel führen, dann muss, um dorthin zu gelangen, eben nur einer von Beiden beschritten werden. Die durch den Nachweis des alternativen Charakters zweier Verifikationsmethode ermöglichte *Verifikationsersparnis* zeigt sich am deutlichsten dann, wenn die Frage nach dem Ergebnis der alten Methode gestellt wird, nachdem die rechnungsbasierte Methode (bis auf den fraglichen Rechenschritt) bereits durchgeführt wurde. So können aufgeworfene Fragen nach der Anzahl der Kinder oder der Größen von Scheitel- und Innenwinkeln gegebenenfalls auf der Stelle beantwortet werden, indem also die gesuchten Antworten, ohne neuerlich die Wirklichkeit zu untersuchen, aus den Ergebnissen vergangener Untersuchungen berechnet werden. Und es muss nicht eigens erläutert werden, dass die *Wirklichkeitsuntersuchungen* – also Zählungen, Messungen und dergleichen –, welche in solchen Fällen durch bestimmte *Rechenhandlungen* ersetzt werden, mitunter überaus aufwendig sein können.

Diese Überlegungen erhellen und bestätigen auch Wittgensteins Bemerkungen zum Zusammenhang zwischen dem *Beweis* und der *Anwendung* einer mathematischen Aussage. Wie Wittgenstein in (BGM, VI §4) zu Recht bemerkt, *rechtfertigt* der mathematische Beweis eine Regel, indem er zeigt, *wie* und *warum* sie benützt werden kann. Der Beweis einer mathematischen Aussage zeigt, wie die Aussage in der Anwendung stimmen muss (BGM, VI §3). So wurde auch schon in Abschnitt 9.2. erläutert, dass etwa der Beweis einer Additionsgleichung eine Regel für das korrekte transitive Zählen liefert; ein Umstand, der dann besonders deutlich wird, wenn der fragliche Beweis, wie dort geschehen, in einer geeigneten Weise notiert wird. Und ebenso ist aus einem Beweis des Innenwinkelsatzes ablesbar, dass man in Bezug auf konkrete Winkelmessungen tatsächlich in der Weise schließen kann, die durch den Satz bestimmt wird. Hierbei ist insbesondere zu bemerken, dass ein zeichnerischer Beweis dieser Aussage so, wie von Berkeley in seiner Einleitung zu (1710) dargestellt, aufzufassen ist. D.h.: dass der Innenwinkelsatz für *alle* konkreten Dreiecke gilt, wird anhand *eines* konkreten Dreiecks – und nicht etwa anhand eines abstrakten Dreiecks – demonstriert. Allerdings ist aus dieser Demonstration deren Wiederholbarkeit in Bezug auf andere Dreiecke und damit die allgemeine Geltung des Innwinkelsatzes ersichtlich.

Die Autonomie der Mathematik ergibt sich daraus, dass die Wahrheit einer mathematischen Aussage in der Konstruierbarkeit eines entsprechenden Beweises besteht. Der wesentliche Zweck solcher Konstruktionen besteht darin, dass, was hierbei konstruiert wird, als *Anweisung* für die Benützung der Schlussregeln gebraucht werden kann, welche die bewiesenen Aussagen ausdrücken. Indem sie deren Geltung zeigen, machen Beweise Schlussregeln begreiflich. Und wenn ihre Geltung eingesehen und somit ihre Befolgung nachvollziehbar gemacht wurde, werden diesen Regeln in Kraft gesetzt. Deshalb ist Mathematik Begriffsbildung.

Nachwort

Die Untersuchungen dieser Arbeit führen also letztlich zum dem Schluss, dass sich das Verhältnis zwischen Mathematik und Wirklichkeit zumindest in dem hier betrachteten Fall der Arithmetik so darstellt, wie von Wittgenstein behauptet: die Aussagen der Arithmetik stellen nicht selbst die Wirklichkeit dar, sondern drücken Regeln für deren Darstellung aus. Dabei konnte im Verlauf dieser Untersuchungen der Platonismus als die eigentliche Gegenposition zu Wittgensteins Auffassung identifiziert werden; also die Auffassung, der zu Folge arithmetische Aussagen dieselbe deskriptive Funktion wie empirische Aussagen haben und sich von letzteren lediglich darin unterscheiden, dass sie nicht die raumzeitliche, sondern eine abstrakte Wirklichkeit darstellen.

Wie von jeher gesehen wurde, ist die Hauptschwierigkeit des Platonismus epistemologischer Art. Wenn arithmetische Aussagen als Beschreibungen abstrakter Gegenstände aufgefasst werden, dann muss die Feststellung der Wahrheit arithmetischer Aussagen, offenbar in Untersuchungen dieser Gegenstände bestehen. Da die abstrakten Gegenstände jenseits von Raum und Zeit liegen sollen, scheinen solche Untersuchungen jedoch ausgeschlossen. Der Platonismus impliziert also die Unverifizierbarkeit arithmetischer Aussagen und damit die Unmöglichkeit arithmetischen Wissens.

Nicht immer klar gesehen wird jedoch, dass diese Unverifizierbarkeit nur als eine begriffliche Unmöglichkeit aufgefasst werden kann. Bei den aus der platonistischen Auffassung folgenden Beschreibungen der Verifikation arithmetischer Aussagen handelt es sich nicht um einwandfreie Darstellungen von Handlungsweisen, die aus praktischen Gründen undurchführbar sind. Vielmehr sind diese Beschreibungen unverständlich, weil einfach unklar ist, was mit dem Untersuchen abstrakter Gegenstände gemeint sein könnte.

Neben diesem Unverständlichkeitseinwand gegen die platonistische Auffassung der Verifikation arithmetischer Aussagen wurde auch ein zweiter, weniger starker Einwand diskutiert, der bereits auf Wittgensteins positive Gegenkonzeption verweist. Hiernach wird die Verifikation arithmetischer Aussagen vom Platonismus zumindest nicht in *akkurater* Weise beschrieben. Denn das, was wir in diesen Fällen tatsächlich tun, ist, arithmetische Zeichen nach bestimmten syntaktischen Regeln zu transformieren. In akkurater Weise wird die Verifikation arithmetischer Aussagen also nur durch solche nominalistischen Formulierungen beschrieben.

Um diesem Problem auszuweichen bliebe dem Platonisten im Prinzip nichts anderes übrig, als die ohne weitere Erläuterungen ohnehin unverständlichen platonistischen Verifikationsbeschreibungen einfach durch die akkuraten nominalistischen Beschreibungen zu definieren. Hiernach wäre die Rede von einem Untersuchen abstrakter Gegenstände, also dahingehend zu interpretieren, dass hiermit nichts anderes als das Umformen arithmetischer Ausdrücke gemeint ist. In diesem Fall sind die platonistischen Verifikationsbeschreibungen jedoch offenbar parasitär gegenüber den gleichbedeutenden nominalistischen Beschreibungen, insofern Erstere nur durch Letztere verständlich werden, und nicht umgekehrt. Die Verifikation arithmetischer Aussagen durch Rückgriff auf die plantonistischen anstelle der nominalistischen Beschreibungen darzustellen, kann daher nicht durch das Bestreben um die Verständlichkeit oder die Akkuratheit dieser Darstellungen begründet werden. Der einzige Grund, der sich dafür anführen ließe, die platonistischen Beschreibungen überhaupt einzuführen und anstelle der nominalistischen Beschreibungen zu verwenden, bestünde darin, dass nur diese Strategie es erlaubt, an den metaphysischen oder ontologischen Thesen des Platonismus festzuhalten.

Nun können zwar im Prinzip auch die nominalistischen Verifikationsbeschreibungen durch entsprechende metaphysische oder ontologische Thesen motiviert werden. Sie müssen es aber nicht. Denn diese Beschreibungen ergeben sich auch dann als Antwort auf die Frage danach, wie die Wahrheit arithmetischer Aussagen festgestellt wird, wenn von dieser Antwort nur deren Akkuratheit und nicht zusätzlich deren Vereinbarkeit mit irgendwelchen metaphysischen Thesen verlangt wird. Und offenbar kann nur eine solche, aus einer ethnologischen – oder besser vielleicht: anthropologischen – Perspektive heraus entwickelte Darstellung der Verifikation arithmetischer Aussagen als Grundlage für eine metaphysisch vorurteilfreie Beantwortung der Frage nach dem Verhältnis zwischen Arithmetik und Wirklichkeit dienen (vgl. hierzu Wittgenstein VB, S. 502).

Wie bereits erläutert, ergibt eine solche vorurteilsfreie Betrachtung, dass die Verifikation einer arithmetischen Aussage in der Konstruktion einer entsprechenden Beweisfigur besteht. Denn das Behaupten arithmetischer Aussagen – also deren Erzeugen und Entscheiden – ist allein durch Bezug auf entsprechende Konstruktionsvorgänge reguliert. So wurde in Kapitel 6 dieser Arbeit erläutert, dass speziell eine arithmetische Gleichung in der Weise verifiziert wird, dass die beiden links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Terme jeweils in eine bestimmte Ziffer umgeformt werden. Und es ist nun zwar richtig, dass sich aus dieser Auffassung keine epistemologischen Schwierigkeiten ergeben, da die Verifikation arithmetischer Aussagen hiernach nur ein Anschauen arithmetischen Zeichen und nicht zusätzlich ein Anschauen deren vermeintlicher abstrakter Bezugsgegenstände verlangt (vgl. LPA, 6.233). Doch dass die Verifikation arithmetischer Aussagen in der Konstruktion bestimmter Zeichenfiguren besteht, kann einfach durch Reflektion auf das tatsächliche Vorgehen erkannt werden und muss nicht etwa aus der Voraussetzung abgeleitet werden, dass abstrakte Gegenstände inexistent oder unzugänglich sind. Und wie in Kapitel 8 argumentiert wurde, folgt hieraus, dass die Arithmetik in Wittgenstein Sinn autonom ist. Hiernach stellt eine arithmetische Aussage deshalb nicht die

Wirklichkeit dar, weil, ob sie wahr ist, nicht durch Wirklichkeitsuntersuchungen, sondern allein dadurch festgestellt wird, dass arithmetische Ausdrücke nach bestimmten syntaktischen Regeln transformiert werden.

Da die arithmetischen Umformungsregeln letztlich auf der Regel des intransitiven Zählens basieren, drücken arithmetische Gleichungen Regeln des intransitiven Zählens aus. Indem diese Regeln in geeigneter Weise auf das transitive Zählen übertragen werden, können arithmetische Gleichungen auch als Ausdruck von Schlussregeln für empirische Zahlaussagen angewendet werden. Diese Anwendung macht die arithmetischen Gleichungen zu Normen der Darstellungen in Wittgensteins Sinn.

Während sich die Autonomiethese mehr oder weniger unmittelbar auf alle Bereiche der Mathematik zu verallgemeinern lassen scheint, wurde in Kapitel 9 zumindest angedeutet, dass sich die Normativitätsthese immerhin auf all diejenigen Bereiche der Mathematik übertragen lässt, die außermathematisch angewendet werden. Wittgensteins Auffassung des Verhältnisses von Mathematik und Wirklichkeit klärt somit auch die Stellung der Mathematik zu den Mathematik anwendenden empirischen Einzelwissenschaften. Hiernach ergänzt die Mathematik nicht etwa die von den empirischen Wissenschaften ermittelten Beschreibungen raumzeitlicher Gegenstände durch entsprechende Beschreibungen abstrakter Gegenstände. Vielmehr stellt sie Implikationsregeln für diejenigen Aussagen der empirischen Wissenschaften dar, die durch mathematische Zeichen gebildet sind. Die Mathematik ist ein Teil der Grammatik der empirischen Wissenschaften.

Literatur

Baker, G.P.; Hacker, P.M.S.:

(1985) *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity*, Oxford: Basil Blackwell.

Becker, O.:

(1975) *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Frankfurt, Main: Suhrkamp Taschenbuch Verlag.

Benaccerraff, P.:

(1965) ‚What Numbers Could not Be', in *The Philosophical Review* 74(1).

(1973) ‚Mathematical Truth', in *The Journal of Philosophy* 70(19).

Berkeley, G.:

(1710) *A treatise concerning the principles of human knowledge*, McCormack, T.J. (Hg.), La Salle, Ill. : Open Court, 1963.

Büttner, K.:

(2009) ‚Das Funktionszeichen', in *Punkt, Punkt, Komma, Strich?*, Christine Abbt, Tim Kammasch (Hg.), transcript Verlag, Bielefeld, pp. 189-197.

(2010) ‚Künne über singuläre und generelle Terme', in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 64(4), S. 546-560.

Bouveresse, J.:

(1987) *La force de la règle. Wittgenstein et l'invention de la nécessité*, Éditions de Minuit.

(1988) *Le pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Éditions de Minuit.

Burgess, J.P. ; Rosen, G.:

(1997) *A subject with no object : strategies for nominalistic interpretation of mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

(2005) 'Nominalism revisited', in *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press.

Carnap, R.:

(1932) ‚Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache', in *Scheinprobleme in der Philosophie und andere metaphysikkritische Schriften*, Mormann, T. (Hg.), Hamburg: Felix Meiner Verlag, 2004.

(1954) *Einführung in die symbolische Logik*, Springer-Verlag.

(1965) *Meaning and Necessity*, University of Chicago Press.

Dummett, M.:

(1959) ‚Wittgenstein's Philosophy of Mathematics', in *The Philosophical Review* 63(3).

(1969) ‚The reality of the past', in *Truth and other Enigmas*, London: Duckworth,1978.

(1973) ‚The Justification of Deduction', in *Truth and other Enigmas*, London: Duckworth, 1978.

(1991) *Frege: Philosophy of Mathematics*, London: Duckworth.

(1993) ‚Wittgenstein on Necessity: Some Reflections', in *The Seas of Language*, Oxford: Clarendon Press, S. 446-461.

Frascolla, P.:

(1994) *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, London: Routledge.

Frege, G.:

(1884) *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Thiel, C. (Hg.), Centenarausgabe, Hamburg : Meiner, 1986.

(1893) *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena : Verlag von Hermann Pohle, (1893-1903).

(1918) 'Der Gedanke', in *Beitr. zur Philos. des deutschen Idealismus 2*, S. 58-77.

Glock, H.-J. :

(1996) *A Wittgenstein dictionary*. Oxford: Blackwell.

(2002) 'Does ontology exist?', in *Philosophy* 77 (2), S. 235-260.

(2003) *Quine and Davidson on Language, Thought and Reality*, Cambridge: Cambridge University Press.

Gödel, K.:

(1964) 'What is Cantor's continuum problem ?', in *Collected works. Kurt Gödel* (Band II), Feferman, S. (Hg.), New York: Oxford University Press, 1995.

Goodman, N.; Quine, W.V.O.:

(1974) ‚Steps Toward a Constructive Nominalism', in *The Journal of Symbolic Logic.*

Goodstein, R.:

(1951) *Constructive Formalism*, Leicester University College.

Hacker, P.M.S.:

(1997) *Wittgenstein im Kontext der analytischen Philosophie*, Frankfurt, Main: Suhrkamp.

Hacking, I.:

(1985) ‚Rules, scepticism, proof, Wittgenstein', in Ian Hacking (ed.), *Exercises in Analysis: Essays by Students of Casimir Lewy*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hale, B.:

(1999) ‚Realism and its oppositions', in *A Companion to the Philosophy of Language*, Hale, B. und Wright, C. (Hg.), Blackwell, S. 271-308.

Hale, B; Wright, C.:

(2002) 'Benacerraf's Dilemman revisited', in *European Journal of Philosophy* 10(1).

(2005) ‚Logicism in the 21st-Century', in *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, S. (Hg.), Oxford University Press.

Higginbotham, J.:

(2006) ‚Truth and Reference as the Basis of Meaning', in *The Blackwell guide to the philosophy of language* (Kap. 3), Devitt, M., Hanley, R., (Hg.), Malden, MA: Blackwell.

Husserl, E.:

(1891) *Philosophie der Arithmetik: psychologische und logische Untersuchungen*, Husserliana Band 12, Den Haag: Nijhoff, 1970.

(1913) *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Husserliana Band 3-5, Den Haag: Nijhoff, 1950-1952.

Lorenzen, P.:

(1956) ‚Ist Mathematik eine Sprache?', in *Synthese* 10(1).

Lycan, W.G.:

(2000) *Philosophy of language : a contemporary introduction*, London: Routledge.

Künne, W.:

(1983) *Abstrakte Gegenstände: Semantik und Ontologie*, Frankfurt, Main: Suhrkamp.

Marion, M.:

(1998) *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

(2006) 'Interpreting Arithmetic: Russell on Applicability and Wittgenstein on Surveyability', in *Travaux de Logique* 18.

(2011) 'Wittgenstein on the Surveyability of Proofs', in *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, Kuusela, O., McGinn, M. (eds.), Oxford: Oxford University Press.

Mill, J.S.:

(1843) *System of Logic*, in *The Collected Works of John Stuart Mill*, Robson, J.M. (Hg.), Toronto: University of Toronto Press, 1963-1991.

Miller, A.:

(2002) 'What is the manifestation argument?', in *Pacific Philosophical Quaterly* 83, S. 352-383.

(2006) *Philosophy of Language*, London: Routledge.

Morris, M.:

(2007) *An introduction to the philosophy of language*, Cambridge: Cambridge University Press.

Mühlhölzer, F.:

(2006) 'A mathematical proof must be surveyable' – What Wittgenstein meant by this and what it implies', in *Grazer Philosophische Studien 71*.

(2010) *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? – Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins* BGM, Klostermann, Frankfurt.

v. Neumann, J.:

(1923) ,On the introduction of tranfinite numbers', in *From Frege to Gödel : a source book in mathematical logic*, van Heijenoort, J. (Hg.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1977.

Parsons, C.:

(1990) 'The Structuralist View of Mathematical Objects', in *Synthese* 84(3), S. 303- 346

Popper, K.R.:

(1972) *Objective knowledge : an evolutionary approach*, Oxford: Clarendon Press.

Potter, M.:

(2011) ‚Wittgenstein on Mathematics', in *The Oxford Handbook of Wittgenstein,* Oskari Kuusela und Marie McGinn (Hrsg.).

Putnam, H.:

(1967) ‚Mathematics without Foundations', in *Journal of Philosophy* 64(1).

Quine, W.V.O.:

(1936) ‚Truth by Convention' in *The Ways of Paradox and Other Essays*.

(1951) Two Dogmas of Empiricism', in The Philosophical Review (60), S. 20-43.

(1960) *Word and Object*.

(1970) *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

(1973) *The roots of reference*. La Salle, Ill.: Open Court.

(1981) *Theories and Things*, Harvard University Press.

(1992) *Pursuit of Truth*, Harvard University Press.

Rautenberg, W.:

(2008) *Einführung in die mathematische Logik*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Rundle, B.:

(1979) *Grammar in Philosophy*, Oxford: Clarendon Press.

Russell, B.:

(1919) *Introduction to Mathematical Logic*, London : Allen & Unwin.

(1937) *The Principles of Mathematics*, London : Allen & Unwin, 1956.

Russell, B. ; Whitehead, A.N.:

(1910) *Principia Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press.

Schroeder, S.:

(2006) *Wittgenstein : the way out of the fly-bottle*, Cambridge: Polity Press.

(2009) ‚Analytic Truths and Grammatical Propositions', in *Wittgenstein and Analytic Philosophy: Essays for P.M.S. Hacker*, Hacker, Glock, Hyman (eds.), Oxford University Press.

Shanker, S.G.:

(1987) *Wittgenstein and the turning-point in the philosophy of mathematics*, London: Croom Helm.

Skorupski, J.:

(1999) ‚Meaning, Use, and Verification', in *A Companion tot he Philosophy of Language*, Hale, B. und Wright, C. (Hg.), Blackwell, S. 29-59.

(2005) ‚Later Empiricism and Logical Positivism', in *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, S. (Hg.), Oxford University Press.

Tait, W.W.:

(1986) ‚Truth and Proof: the Platonism of Mathematics', in *Synthese* 69(3).

Tarski, A.:

(1933) ‚The concept of truth in the languages of the deductive sciences', in *Logic, Semantics, Metamathematics, papers from 1923 to 1938*, Corcoran, J. (Hg.), Indianapolis: Hackett Publishing Company, S.152–278, 1983.

Tugendhat, E.:

(1976) *Vorlesungen zur Einführung in die sprachanalytische Philosophie*, Frankfurt, Main: Suhrkamp Taschenbuch Verlag.

Waismann, F.:

(1936) *Einführung in das mathematische Denken*, München: DTV, 1970.

Wright, C.:

(1980) *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Harvard University Press.

(1983) *On Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press .

Curriculum Vitae

Kai Büttner

Kai Büttner wurde am 07.03.1979 in Potsdam (Deutschland) geboren. Im Juli 2006 erhielt er das Diplom im Fach Mathematik an der Freien Universität Berlin.

Weitere Publikationen:

— ‚Wittgenstein on names and ostensive definitions', in *A Companion to Wittgenstein*, John Hyman, Hans-Johann Glock (Hrsg.), Oxford: Blackwell, i.E.

— ‚Themes from Wittgenstein and Quine' (Hrsg.), in *Grazer philosophische Studien* 89, 2014.

— ‚Künne über singuläre und generelle Terme', in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 64(4), 2010, S. 546-560.

— ‚Das Funktionszeichen', in *Punkt, Punkt, Komma, Strich?*, Christine Abbt, Tim Kammasch (Hrsg.), Bielefeld: transcript Verlag, 2009, S. 189-197.